УДК 511.218+511.336

И. Д. Шкредов

Об одной задаче Гауэрса

Пусть $\delta > 0$ – любое вещественное число, N – натуральное число, $N \geqslant \exp\exp\exp\{\delta^{-c}\}$, где $c > 0$ – некоторая эффективная константа. Доказано, что любое множество $A \subseteq \{1, \dots, N\}^2$ мощности не меньше δN^2 содержит тройку вида $\{(k, m), (k + d, m), (k, m + d)\}$, где $d > 0$.

Библиография: 24 наименования.

§ 1. Введение

В 1927 г. Б. Л. Ван дер Варден доказал свою знаменитую теорему об арифметических прогрессиях (см. [1]):

Теорема 1. *Пусть h и k – натуральные числа. Существует такое число $N(h, k)$, что для любого натурального $N \geqslant N(h, k)$ и любого разбиения множества $1, 2, \dots, N$ на h подмножеств одно из подмножеств содержит арифметическую прогрессию длины k.*

Пусть N – натуральное число. Положим $a_k(N) = \frac{1}{N} \max\{|A| \colon A \subseteq [1, N]$, A не содержит арифметических прогрессий длины $k\}$, где $|A|$ означает мощность множества A. В работе [2] П. Эрдеш и П. Туран высказали гипотезу, согласно которой в любом множестве положительной плотности найдется арифметическая прогрессия заданной длины. Другими словами, они предположили, что для любого $k \geqslant 3$

$$a_k(N) \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty. \tag{1}$$

Ясно, что из этого предположения вытекает теорема Ван дер Вардена.

Простейший случай $k = 3$ гипотезы (1) был доказан К. Ф. Ротом в [3]. В своей работе Рот, используя метод Харди–Литлвуда, доказал неравенство

$$a_3(N) \ll \frac{1}{\log\log N}, \qquad N \geqslant 3.$$

Наилучший, в настоящее время, результат об оценке сверху величины $a_3(N)$ принадлежит Дж. Бургейну [4]. Он доказал, что

$$a_3(N) \ll \sqrt{\frac{\log\log N}{\log N}}, \qquad N \geqslant 3. \tag{2}$$

Для произвольного k гипотеза (1) была доказана Е. Семереди [5] в 1975 г. В своем доказательстве Семереди использует трудные комбинаторные аргументы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02-01-00912), программы "Ведущие научные школы" (грант № НШ-136.2003.1) и INTAS (грант № 03-51-5070).

© И. Д. Шкредов, 2006

Основу его доказательства составляет так называемая лемма регулярности, которая является важнейшим инструментом исследования графов.

Альтернативное доказательство было предложено Х. Фёстенбергом в работе [18]. Его подход использует методы эргодической теории. Фёстенберг показал, что теорема Е. Семереди эквивалентна утверждению о кратной возвращаемости для почти всех точек в произвольной динамической системе. Мы сформулируем его теорему в следующем виде.

Теорема 2. *Пусть X – метрическое пространство с метрикой $d(\,\cdot\,,\cdot\,)$ и борелевской сигма-алгеброй измеримых множеств Φ. Пусть T – сохраняющее меру μ отображение X в себя, $0 < \mu(X) < \infty$ и $k \geqslant 3$. Тогда для почти всех $x \in X$*

$$\liminf_{n\to\infty} \max\bigl\{d(T^n x, x), d(T^{2n} x, x), \ldots, d(T^{(k-1)n} x, x)\bigr\} = 0.$$

Следует отметить, что, используя этот метод, Фёстенберг и его ученики получили множество глубоких обобщений теоремы Семереди (см., например, [18], [22]), которые комбинаторными методами доказать пока не удалось.

А. Беренд в работе [11] получил нижнюю оценку величины $a_3(N)$:

$$a_3(N) \gg \exp\bigl\{-C(\log N)^{1/2}\bigr\},$$

где C – некоторая положительная вычислимая константа. (Оценку снизу величины $a_k(N)$ для произвольного k см. в [8].)

К сожалению, методы Семереди дают очень слабые верхние оценки для $a_k(N)$. Эргодический подход вообще не дает никаких оценок. Только в 2001 г. В. Т. Гауэрс [6] получил первый эффективный результат о скорости стремления к нулю величины $a_k(N)$ для $k \geqslant 4$. Он доказал следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $\delta > 0$, $k \geqslant 4$ и $N \geqslant \exp\exp\{C\delta^{-K}\}$, где $C, K > 0$ – некоторые эффективные константы, зависящие только от k. Пусть A – произвольное множество из $\{1, 2, \ldots, N\}$, $|A| \geqslant \delta N$. Тогда в A есть арифметическая прогрессия длины k.*

Другими словами, В. Т. Гауэрс доказал, что для произвольного $k \geqslant 4$ имеет место неравенство $a_k(N) \ll 1/(\log\log N)^{c_k}$, где константа c_k зависит только от k.

В настоящей работе мы будем решать следующую задачу. Рассмотрим двумерную решетку $[1, N]^2$ с базисом $\{(1, 0), (0, 1)\}$. Пусть

$$L(N) = \frac{1}{N^2} \max\{|A| \colon A \subseteq [1, N]^2 \text{ и } A \text{ не содержит троек вида } (k, m), (k + d, m), (k, m + d),\ d > 0\}. \qquad (3)$$

Тройку из (3) мы будем называть *уголком*. В работах [9], [18] было доказано, что величина $L(N)$ стремится к нулю, когда N стремится к бесконечности. В. Т. Гауэрс (см. [6]) поставил вопрос о скорости сходимости $L(N)$ к нулю.

В работе [12] В. Ву предложил следующее решение этого вопроса (см. также [13], [**?**]). Пусть $\log_{[1]} = \log N$ и $\log_{[l]} N = \log(\log_{[l-1]} N)$ для $l \geqslant 2$. Пусть k – наибольшее натуральное число такое, что $\log_{[k]} N \geqslant 2$. Тогда положим $\log_* N = k$.

В. Ву доказал, что

$$L(N) \leqslant \frac{100}{\log_*^{1/4} N}\,.$$

Основным результатом настоящей статьи является

Теорема 4. *Пусть* $\delta > 0$, $N \geqslant \exp\exp\exp\{\delta^{-c}\}$, $c > 0$ – *некоторая эффективная константа и* $A \subseteq \{1,\dots,N\}^2$ – *произвольное подмножество мощности не меньше* δN^2. *Тогда* A *содержит тройку вида* $\{(k,m),(k+d,m),(k,m+d)\}$, *где* $d > 0$.

Таким образом мы доказываем оценку $L(N) \ll 1/(\log\log\log N)^{C_1}$, где $C_1 > 0$ – некоторая эффективная константа.

Кроме того, мы получим простейшую оценку снизу для величины $L(N)$ (см. предложение 1).

Утверждения, необходимые для доказательства теоремы 4, содержатся в § 2–4.

Прежде всего, отметим, что обычные методы анализа Фурье для доказательства основной теоремы не применимы. Пусть $\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, и пусть $\chi_A(\vec{x})$ – характеристическая функция произвольного множества A из $\mathbb{Z}_N^2$, $|A| = \delta N^2$, а $\widehat{\chi}_A(\vec{r})$ – его преобразование Фурье. Тогда количество троек вида $\{(k,m),(k+d,m),(k,m+d)\}$ в A равно

$$\frac{1}{N^3}\sum_{x,y,z\in\mathbb{Z}_N}\widehat{\chi}_A(x+z,y-z)\widehat{\chi}_A(-x,z)\widehat{\chi}_A(-z,-y). \tag{4}$$

Член, получающийся при $x = y = z = 0$, в сумме (4) является главным и равен $\delta^3 N^3$. Обозначим оставшуюся сумму через σ'. В силу метода Фурье если все ненулевые коэффициенты Фурье $\widehat{\chi}_A(\vec{r})$ малы, то и σ' мала по сравнению с $\delta^3 N^3$. Приведем простой пример множества с очень маленькими коэффициентами Фурье, для которого член, получающийся при $x = y = z = 0$, в сумме (4) не является главным. Пусть A имеет вид $E\times E$, где $E \subseteq [1,N]$ – случайное множество с плотностью $\sqrt{\delta}$. Тогда для любого положительного ε все ненулевые коэффициенты Фурье множества E равны $O(N^{1/2+\varepsilon})$, а значит, все ненулевые коэффициенты Фурье множества A равны $O(N^{1+2\varepsilon})$. Но математическое ожидание числа троек вида $\{(k,m),(k+d,m),(k,m+d)\}$ в A равно $\delta^2 N^3$. Мы видим, что это число не совпадает с главным членом суммы (4). Следовательно, с положительной вероятностью найдется множество A, имеющее маленькие коэффициенты Фурье и содержащее $\delta^2 N^3$ троек $\{(k,m),(k+d,m),(k,m+d)\}$.

В § 2 обсуждается понятие α-равномерности. Приведем простые эвристические рассуждения. Возьмем некоторое положительное число δ, и пусть натуральное число N больше $1/\delta$. Будем бросать над каждой точкой из $[1,N]^2$ монету и предположим, что орел выпадает с вероятностью δ, а решка – с вероятностью $1-\delta$. Пусть A – множество всех точек, над которыми выпал орел. Тогда в среднем $|A| = \delta N^2$ и A содержит $\delta^3 N^3 > 1$ уголков. Мы видим, что с положительной вероятностью в множестве A содержится по крайней мере 1 уголок (на самом деле, при больших N множество A будет содержать много уголков.)

В § 2 мы дадим определение α-равномерных множеств. Смысл этого определения такой: α-равномерные множества – это множества, которые содержат

примерно столько уголков, сколько случайные множества. Значит, если множество α-равномерно, то оно содержит много уголков.

В § 3 будет разобран случай, когда множество A не является α-равномерным. С множеством A можно ассоциировать некоторый граф G_A и его матрицу смежности M. Будет показано, что α-равномерность множества A эквивалентна тому, что второе по величине собственное значение матрицы MM^T мало (M^T – транспонированная матрица). Оказывается, что если A не α-равномерно, а значит, MM^T имеет большое второе собственное значение, в A можно выделить подмножество вида $E_1 \times E_2$, в котором A имеет плотность больше $\delta + \varepsilon$, где $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$. Пусть A не содержит уголков. Тогда ограничение A на $E_1 \times E_2$ также не содержит уголков и мы можем применить к этому множеству рассуждения, приведенные в § 3 и 4. В конце концов мы либо придем к противоречию, т. е. найдем уголок в A, либо выделим такое множество вида $E_1^T \times E_2^T$, в котором A имеет плотность, близкую к 1.

Если бы E_1^T и E_2^T были достаточно длинными прогрессиями с одинаковой разностью, то любое подмножество $E_1^T \times E_2^T$, плотность которого больше $3/4$, должно было содержать уголок. Для произвольных множеств это неверно. Например, если E_2^T – прогрессия с разностью большей, чем $|E_1^T|$, то в $E_1^T \times E_2^T$ уголков нет. Для доказательства придется выбирать E_1, E_2 специальным образом, а именно α-равномерными в смысле Гауэрса (имеющими маленькие коэффициенты Фурье).

В § 4 приведено доказательство теоремы 4. В нем мы объединим все результаты из предыдущих параграфов и воспользуемся техникой Гауэрса, чтобы выбрать E_1, E_2 нужным нам образом.

С точки зрения эргодической теории теорема 4 является результатом о количественной возвращаемости точки в динамической системе под действием двух *коммутирующих* отображений. В § 5 приведены приложения теоремы 4 к динамическим системам.

В настоящей работе использованные методы развивают подход, приведенный в работах [6], [10].

§ 2. α-равномерные множества

Пусть A – произвольное множество из $\mathbb{Z}_N$, $|A| = \delta N$. Обозначим через $\chi_A(s)$ характеристическую функцию множества A. Функция $f(s) = \chi_A(s) - \delta$ называется *балансовой* функцией множества A. Одним из ключевых моментов работы [6] являлось понятие α-равномерности.

Обозначим через D замкнутый диск на комплексной плоскости с центром в нуле и радиусом 1.

Определение 1. Функция f из $\mathbb{Z}_N$ в D называется *α-равномерной*, если

$$\sum_k \Big| \sum_s f(s)\overline{f(s-k)} \Big|^2 \leqslant \alpha N^3. \tag{5}$$

Будем говорить, что множество A является α-равномерным, если его балансовая функция α-равномерна. В работе [6] было доказано, что если A является

α-равномерным множеством, то A близко к случайному множеству в следующем смысле: количество арифметических прогрессий длины 3 в A примерно такое же, как и в случайном множестве с плотностью δ.

Пусть f – функция из $\mathbb{Z}_N$ в $\mathbb{C}$. Обозначим через $\hat{f}(r)$ r-й коэффициент Фурье функции f

$$\hat{f}(r) = \sum_k f(k)e(-kr),$$

где $e(x) = e^{2\pi ix/N}$. Заметим, что если $f(k)$ – балансовая функция множества $A \subset \mathbb{Z}_N$, то $\hat{f}(0) = 0$ и $\hat{f}(r) = \widehat{\chi}_A(r)$ для всех $r \neq 0$.

Будем использовать несколько известных формул, касающихся преобразования Фурье:

$$N\sum_s |f(s)|^2 = \sum_r |\hat{f}(r)|^2, \tag{6}$$

$$N\sum_s f(s)\,\overline{g(s)} = \sum_r \hat{f}(r)\,\overline{\widehat{g}(r)}, \tag{7}$$

$$N\sum_k \Big|\sum_s f(s)\,\overline{g(s-k)}\Big|^2 = \sum_r |\hat{f}(r)|^2\,|\widehat{g}(r)|^2. \tag{8}$$

Нам понадобится лемма 2.2 из работы [6]. Эта лемма устанавливает, по сути, несколько эквивалентных определений α-равномерности.

Лемма 1. *Пусть f – функция из $\mathbb{Z}_N$ в D. Если f является α-равномерной, то*:

1) $\sum_r |\hat{f}(r)|^4 \leqslant \alpha N^4$;

2) $\max_r |\hat{f}(r)| \leqslant \alpha^{1/4} N$;

3) $\Big|\sum_k \big|\sum_s f(s)\,\overline{g(s-k)}\big|^2 - \frac{1}{N}\big|\sum_s f(s)\big|^2\big|\sum_s g(s)\big|^2\Big| \leqslant \alpha^{1/2}N^2\|g\|_2^2$ *для любой функции* g, $g\colon \mathbb{Z}_N \to D$;

4) *число тех* k, *для которых* $\big|(f*g)(k) - \frac{1}{N}\sum_s f(s)\,\overline{\sum_s g(s)}\,\big| \geqslant \alpha^{1/6}N$, *не превосходит* $\alpha^{1/6}N$, *где* $g\colon \mathbb{Z}_N \to D$ – *произвольная функция.*

Обратно, если выполнено свойство $\max_r |\hat{f}(r)| \leqslant \alpha N$ *с некоторым* α, *то функция* f *является* α^2*-равномерной.*

Доказательство. По формуле (8) имеем

$$N\sum_k \Big|\sum_s f(s)\,\overline{f(s-k)}\Big|^2 = \sum_r |\hat{f}(r)|^4, \tag{9}$$

и утверждение 1) леммы доказано. Далее,

$$\max_r |\hat{f}(r)|^4 \leqslant \sum_r |\hat{f}(r)|^4 \leqslant \alpha N^4.$$

Следовательно, и утверждение 2) леммы доказано. Обратно, если выполнено свойство $\max_r |\hat{f}(r)| \leqslant \alpha N$ с некоторым α, то, используя равенство (6), получаем

$$\sum_r |\hat{f}(r)|^4 \leqslant \alpha^2 N^2 \sum_r |\hat{f}(r)|^2 = \alpha^2 N^3 \sum_s |f(s)|^2 \leqslant \alpha^2 N^4.$$

Значит, функция f является α^2-равномерной. Осталось доказать утверждения 3) и 4). Пусть $(f*g)(k) = \sum_s f(s)\,\overline{g(s-k)}$. Тогда $\sum_k \sum_s f(s)\,\overline{g(s-k)} = \sum_s f(s)\cdot\overline{\sum_s g(s)}$. Раскрывая следующий квадрат, получаем:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sum_k \Bigl|(f*g)(k) - \frac{1}{N}\sum_s f(s)\,\overline{\sum_s g(s)}\Bigr|^2 \\ &= \sum_k \Bigl|\sum_s f(s)\,\overline{g(s-k)}\Bigr|^2 - \frac{1}{N}\Bigl|\sum_s f(s)\Bigr|^2\Bigl|\sum_s g(s)\Bigr|^2. \qquad (10)\end{aligned}$$

Пусть $\phi(k) = (f*g)(k) - \frac{1}{N}\sum_s f(s)\,\overline{\sum_s g(s)}$. Тогда

$$\sum_k \Bigl|\sum_s f(s)\,\overline{g(s-k)}\Bigr|^2 - \frac{1}{N}\Bigl|\sum_s f(s)\Bigr|^2\Bigl|\sum_s g(s)\Bigr|^2 = \sum_k |\phi(k)|^2.$$

Имеем $\hat{\phi}(0) = \sum_k \phi(k) = 0$. Кроме того, для всех $r \neq 0$ выполнено $\hat{\phi}(r) = \hat{f}(r)\,\overline{\hat{g}(r)}$. Применяя равенства (6) и (10), находим

$$\sigma = \frac{1}{N}\sum_r |\hat{\phi}(r)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{r\neq 0} |\hat{\phi}(r)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{r\neq 0} |\hat{f}(r)|^2\,|\hat{g}(r)|^2. \qquad (11)$$

Если f является α-равномерной, то в силу утверждения 2) выполнено $\max_r |\hat{f}(r)| \leqslant \alpha^{1/4}N$. Применяя к (11) равенство (6), получаем

$$\sigma \leqslant \alpha^{1/2}N\sum_r |\hat{g}(r)|^2 \leqslant \alpha^{1/2}N^2\sum_s |g(s)|^2 = \alpha^{1/2}N^2\|g\|_2^2, \qquad (12)$$

и утверждение 3) доказано. Из соотношения (12) вытекает, что

$$\sum_k \Bigl|(f*g)(k) - \frac{1}{N}\sum_s f(s)\,\overline{\sum_s g(s)}\Bigr|^2 \leqslant \alpha^{1/2}N^3. \qquad (13)$$

Обозначим через B множество тех k, для которых выполнено

$$\Bigl|(f*g)(k) - \frac{1}{N}\sum_s f(s)\,\overline{\sum_s g(s)}\Bigr| \geqslant \alpha^{1/6}N.$$

Применяя неравенство (13), получаем

$$|B|(\alpha^{1/6}N)^2 \leqslant \alpha^{1/2}N^3.$$

Иными словами, $|B| \leqslant \alpha^{1/6}N$. Лемма доказана.

Пусть $f\colon \mathbb{Z}_N^2 \to \mathbb{C}$ – некоторая функция. Тогда $\vec{r} = (r_1, r_2)$-й коэффициент Фурье вычисляется по формуле

$$\hat{f}(\vec{r}) = \hat{f}(r_1, r_2) = \sum_{k,m} f(k,m)e(-(kr_1 + mr_2)).$$

Определение 2. Функция f из $\mathbb{Z}_N^2$ в D называется *α-равномерной*, если

$$\sum_{\vec{t}} \Big| \sum_{\vec{s}} f(\vec{s})\, \overline{f(\vec{s}-\vec{t})} \Big|^2 \leqslant \alpha N^6. \tag{14}$$

Будем говорить, что множество $A \subseteq \mathbb{Z}_N^2$, $|A| = \delta N^2$, *α-равномерно*, если его балансовая функция $f(\vec{s}) = \chi_A(\vec{s}) - \delta$ является α-равномерной. Ясно, что аналог леммы 1 справедлив и для таких функций.

Лемма 1′. *Пусть f – функция из $\mathbb{Z}_N^2$ в D. Если f является α-равномерной, то*:

1) $\sum_{\vec{r}} |\hat{f}(\vec{r})|^4 \leqslant \alpha N^8$;

2) $\max_{\vec{r}} |\hat{f}(\vec{r})| \leqslant \alpha^{1/4} N^2$;

3) $\Big| \sum_{\vec{k}} \big| \sum_{\vec{s}} f(\vec{s})\, g(\vec{s}-\vec{k}) \big|^2 - \frac{1}{N^2} \big| \sum_{\vec{s}} f(\vec{s}) \big|^2 \big| \sum_s g(\vec{s}) \big|^2 \Big| \leqslant \alpha^{1/2} N^4 \|g\|_2^2$ *для любой функции g, $g\colon \mathbb{Z}_N^2 \to D$;*

4) *число тех $\vec{k}$, для которых $\big|(f * g)(\vec{k}) - \frac{1}{N^2} \sum_{\vec{s}} f(\vec{s})\, \overline{\sum_{\vec{s}} g(\vec{s})} \big| \geqslant \alpha^{1/6} N^2$, не превосходит $\alpha^{1/6} N^2$, где $g\colon \mathbb{Z}_N^2 \to D$ – произвольная функция.*

Обратно, если выполнено свойство $\max_r |\hat{f}(r)| \leqslant \alpha N^2$ с некоторым α, то функция f является α^2-равномерной.

Пусть $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{Z}_N$ – арифметические прогрессии. Множество $P \subseteq \mathbb{Z}_N^2$ называется *двумерной арифметической прогрессией*, если $P = P_1 \times P_2$.

Лемма 2. *Пусть $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{Z}_N$ – арифметические прогрессии с шагом 1, а $P = P_1 \times P_2$ – двумерная арифметическая прогрессия. Пусть множество A принадлежат $\mathbb{Z}_N^2$, $|A| = \delta N^2$, и является α-равномерным. Тогда $\big| |A \cap P| - \delta |P| \big| \leqslant 16 \alpha^{1/4} N^2$.*

Доказательство. Пусть $s \in \mathbb{Z}_N$. Считая, что s принадлежит приведенной системе вычетов, обозначим через $|s|$ абсолютную величину s. Имеем $|s| \leqslant N/2$ для любого $s \in \mathbb{Z}_N$. Пусть $P = \{a, a+1, \dots, a+M_1-1\} \times \{b, b+1, \dots, b+M_2-1\}$. Для любого вектора $\vec{r} = (r_1, r_2)$, $r_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$, выполнено

$$|\widehat{\chi}_P(\vec{r})| = \left| \frac{e(-r_1 M_1) - 1}{e(-r_1) - 1} \right| \left| \frac{e(-r_2 M_2) - 1}{e(-r_2) - 1} \right| \leqslant \frac{4N^2}{|e(-r_1) - 1|\, |e(-r_2) - 1|}\,.$$

Для всех $\theta \in [-\pi, \pi]$ справедливо неравенство $|1 - e^{i\theta}| \geqslant 2|\theta|/\pi$. Отсюда имеем $|\widehat{\chi}_P(\vec{r})| \leqslant N^2/4|r_1|\,|r_2|$. Если же $r_1 = 0$, $r_2 \neq 0$, то $|\widehat{\chi}_P(\vec{r})| \leqslant N^2/2|r_2|$.

Аналогично, $|\widehat{\chi}_P(\vec{r})| \leqslant N^2/2|r_1|$, если $r_2 = 0$, $r_1 \neq 0$. Отсюда $\sum_{\vec{r} \neq 0} |\widehat{P}(\vec{r})|^{4/3} \leqslant 32 N^{8/3}$. Используя равенство (7), получаем

$$\sigma = \big| |A \cap P| - \delta |P| \big| = \Big| \sum_{\vec{r}} \chi_A(\vec{r}) \chi_P(\vec{r}) - \delta |P| \Big| = \frac{1}{N^2} \Big| \sum_{\vec{r} \neq 0} \widehat{\chi}_A(\vec{r})\, \overline{\widehat{\chi}_P(\vec{r})} \Big|.$$

Пользуясь неравенством Гёльдера, получаем оценку

$$\begin{aligned} \Big| \sum_{\vec{r} \neq 0} \widehat{\chi}_A(\vec{r})\, \overline{\widehat{\chi}_P(\vec{r})} \Big| &\leqslant \Big(\sum_{\vec{r} \neq 0} |\widehat{\chi}_A(\vec{r})|^4 \Big)^{1/4} \Big(\sum_{\vec{r} \neq 0} |\widehat{\chi}_P(\vec{r})|^{4/3} \Big)^{3/4} \\ &\leqslant 16 N^2 \Big(\sum_{\vec{r} \neq 0} |\widehat{\chi}_A(\vec{r})|^4 \Big)^{1/4}. \end{aligned}$$

Поскольку множество A является α-равномерным, то $\sum_{\vec{r}\neq 0}|\widehat{\chi}_A(\vec{r})|^4 \leqslant \alpha N^8$, откуда имеем

$$\sigma \leqslant \frac{1}{N^2}\,16N^2(\alpha N^8)^{1/4} = 16\alpha^{1/4}N^2.$$

Лемма доказана.

Обозначим через $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ векторы $(1,0)$ и $(0,-1)$ соответственно.

Мы дадим определение α-равномерности, которое, как мы увидим далее, согласуется с определением α-равномерности, приведенным в работе [6].

Пусть $E_1 \times E_2$ – некоторое подмножество $\mathbb{Z}_N^2$ и $f\colon \mathbb{Z}_N^2 \to D$ – некоторая функция. Будем записывать $f\colon E_1 \times E_2 \to D$, если вне $E_1 \times E_2$ функция f равна нулю.

Определение 3. Пусть α – любое действительное число, $\alpha \in [0,1]$. Пусть $E_1 \times E_2$ – некоторое подмножество $\mathbb{Z}_N^2$. Функция $f\colon E_1 \times E_2 \to D$ называется *α-равномерной относительно базиса* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, если

$$\sum_{\vec{s}\in\mathbb{Z}_N^2}\sum_{u\in\mathbb{Z}_N}\sum_{r\in\mathbb{Z}_N} f(\vec{s})\,\overline{f(\vec{s}+u\vec{e}_2)}\,\overline{f(\vec{s}+r\vec{e}_1)}\,f(\vec{s}+u\vec{e}_2+r\vec{e}_1) \leqslant \alpha|E_1|^2|E_2|^2. \quad (15)$$

Удобно записать условие α-равномерности в следующей, эквивалентной (15), форме. Пусть $f(k,m) = f(k\vec{e}_1 + m\vec{e}_2)$. Тогда α-равномерность функции f эквивалентна условию

$$\sum_{m,p\in\mathbb{Z}_N}\Bigl|\sum_{k\in\mathbb{Z}_N} f(k,m)\,\overline{f(k,p)}\Bigr|^2 \leqslant \alpha|E_1|^2|E_2|^2. \quad (16)$$

Будем называть декартово произведение двух множеств $E_1\times E_2$ *прямоугольником*. Если $|E_1| = |E_2|$, то назовем $E_1 \times E_2$ *квадратом*.

Пусть множество A принадлежит некоторому множеству $E_1 \times E_2$ и $\chi(\vec{s}) = \chi_A(\vec{s})$ – его характеристическая функция. Пусть $\vec{s} = k\vec{e}_1 + m\vec{e}_2$. Определим плотности $\delta_m = \delta_m^{\vec{e}_1}$ и $\gamma_k = \gamma_k^{\vec{e}_2}$ по формулам

$$\delta_m = \frac{1}{|E_1|}\sum_{p=1}^{N}\chi(m\vec{e}_2 + p\vec{e}_1), \qquad \gamma_k = \frac{1}{|E_2|}\sum_{p=1}^{N}\chi(k\vec{e}_1 + p\vec{e}_2).$$

Заметим, что $\delta_m = 0$ вне E_2, $\gamma_k = 0$ вне E_1 и

$$\frac{1}{|E_2|}\sum_{m\in E_2}\delta_m = \frac{1}{|E_1|}\sum_{k\in E_1}\gamma_k = \frac{|A|}{|E_1\times E_2|}\,.$$

Функцию $f(\vec{s}) = (\chi(\vec{s}) - \delta_m)\chi_{E_1\times E_2}(\vec{s})$ назовем *балансовой* функцией множества A.

Множество $A \subseteq E_1 \times E_2$ является *α-равномерным относительно базиса* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, если его балансовая функция α-равномерна относительно этого базиса. Если множества E_1 и E_2 не указаны, то мы будем подразумевать, что $E_1 = \mathbb{Z}_N$, $E_2 = \mathbb{Z}_N$. Заметим, что множество A может быть α-равномерным относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, но не α-равномерным относительно базиса $(\vec{e}_2, \vec{e}_1)$.

В § 1 был приведен пример α-равномерного множества в $\mathbb{Z}_N^2$, которое не является α-равномерным относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Можно показать, что любое α-равномерное относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ множество $A \subseteq \mathbb{Z}_N^2$ является обычным α-равномерным двумерным множеством. Мы не доказываем здесь этого утверждения, поскольку его не используем.

Прежде всего поясним комбинаторный смысл понятия α-равномерности.

Назовем четверку вида $(\vec{s}, \vec{s}+u\vec{e}_2, \vec{s}+r\vec{e}_1, \vec{s}+u\vec{e}_2+r\vec{e}_1)$ *простейшим прямоугольником*. Множество $A \subseteq \mathbb{Z}_N^2$ содержит простейший прямоугольник, если оно содержит все четыре точки прямоугольника.

Лемма 3. *Пусть множество A лежит в $\mathbb{Z}_N^2$ и имеет мощность δN^2. Тогда A содержит не менее чем $\delta^4 N^4$ простейших прямоугольников.*

Доказательство. Пусть $\chi(\vec{s})$ – характеристическая функция множества A, $\vec{s} = k\vec{e}_1 + m\vec{e}_2$. Количество простейших прямоугольников в A равно

$$\sum_{\vec{s},u}\sum_{r} \chi(\vec{s})\,\overline{\chi(\vec{s}+u\vec{e}_2)}\,\overline{\chi(\vec{s}+r\vec{e}_1)}\,\chi(\vec{s}+u\vec{e}_2+r\vec{e}_1) = \sum_{m,p}\Big|\sum_{k}\chi(k,m)\,\overline{\chi(k,p)}\Big|^2.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\begin{aligned}\sum_{m,p}\Big|\sum_{k}\chi(k,m)\,\overline{\chi(k,p)}\Big|^2 &\geqslant \frac{1}{N^2}\Big(\sum_{m,p}\sum_{k}\chi(k,m)\,\overline{\chi(k,p)}\Big)^2 \\ &= \frac{1}{N^2}\Big(\sum_{k}\Big|\sum_{m}\chi(k,m)\Big|^2\Big)^2 \geqslant \frac{1}{N^4}\Big(\sum_{k,m}\chi(k,m)\Big)^4 = \delta^4 N^4.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Введем несколько обозначений. Пусть $\mathcal{C}$ – оператор комплексного сопряжения. Для каждого целого неотрицательного n пусть $\mathcal{C}^n$ обозначает взятие комплексного сопряжения n раз. Если $\vec{x}$ и $\vec{y}$ – два вектора из $\mathbb{C}^k$, то мы будем обозначать их скалярное произведение как $\vec{x}\cdot\vec{y}$ или как $(\vec{x},\vec{y})$. Для $\varepsilon \in \{0,1\}^k$ пусть $|\varepsilon|$ обозначает $\sum_{i=1}^k \varepsilon_i$.

Лемма 4. *Пусть $f_\varepsilon(\vec{s})$ – некоторая функция из $\mathbb{Z}_N^2$ в D для каждого $\varepsilon \in \{0,1\}^2$. Тогда справедливо неравенство*

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_{p,q}\sum_{\vec{s}}\prod_{\varepsilon\in\{0,1\}^2}\mathcal{C}^{|\varepsilon|} f_\varepsilon(\vec{s}+\varepsilon_1 p\vec{e}_1+\varepsilon_2 q\vec{e}_2)\Big| \\ &\qquad\leqslant \prod_{\varepsilon\in\{0,1\}^2}\Big|\sum_{p,q}\sum_{\vec{s}}\prod_{\eta\in\{0,1\}^2}\mathcal{C}^{|\eta|} f_\varepsilon(\vec{s}+\eta_1 p\vec{e}_1+\eta_2 q\vec{e}_2)\Big|^{1/4}.\end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $\vec{s} = k\vec{e}_1 + m\vec{e}_2$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{p,q}\sum_{\vec{s}}\prod_{\varepsilon\in\{0,1\}^2}\mathcal{C}^{|\varepsilon|}f_\varepsilon(\vec{s}+\varepsilon_1 p\vec{e}_1+\varepsilon_2 q\vec{e}_2)\Big| \\
&\quad=\sum_{k,p}\Big(\sum_m f_{\{0,0\}}(k,m)\,\overline{f_{\{1,0\}}(k+p,m)}\Big)\Big(\sum_m \overline{f_{\{0,1\}}(k,m)}\,f_{\{1,1\}}(k+p,m)\Big) \\
&\quad\leqslant\Big(\sum_{k,p}\Big|\sum_m f_{\{0,0\}}(k,m)\,\overline{f_{\{1,0\}}(k+p,m)}\,\Big|^2\Big)^{1/2} \\
&\qquad\times\Big(\sum_{k,p}\Big|\sum_m \overline{f_{\{0,1\}}(k,m)}\,f_{\{1,1\}}(k+p,m)\Big|^2\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим каждую из скобок. Первую скобку можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
&\sum_{k,p}\Big|\sum_m f_{\{0,0\}}(k,m)\,\overline{f_{\{1,0\}}(k+p,m)}\,\Big|^2 \\
&\quad=\sum_{k,p}\sum_{m,r} f_{\{0,0\}}(k,m)\,\overline{f_{\{1,0\}}(k+p,m)}\,\overline{f_{\{0,0\}}(k,r)}\,f_{\{1,0\}}(k+p,r) \\
&\quad=\sum_{m,r}\Big(\sum_k f_{\{0,0\}}(k,r)\,\overline{f_{\{0,0\}}(k,m)}\Big)\Big(\sum_k f_{\{1,0\}}(k,r)\,\overline{f_{\{1,0\}}(k,m)}\Big). \qquad (17)
\end{aligned}$$

Опять можно применить неравенство Коши–Буняковского к (17). Точно так же преобразуем вторую скобку. Лемма доказана.

Пусть f – произвольная функция, $f\colon \mathbb{Z}_N^2 \to \mathbb{C}$. Определим $\|f\|$ формулой

$$\|f\| = \Big|\sum_{\vec{s}}\sum_{r,u} f(\vec{s})\,\overline{f(\vec{s}+u\vec{e}_2)}\,\overline{f(\vec{s}+r\vec{e}_1)}\,f(\vec{s}+u\vec{e}_2+r\vec{e}_1)\Big|^{1/4}. \qquad (18)$$

Лемма 5. *Формула* (18) *задает норму.*

Доказательство. Поскольку $\|f\|^4 = \sum_{m,p}\big|\sum_k f(k,m)\,\overline{f(k,p)}\,\big|^2$, то $\|f\| = 0$ тогда и только тогда, когда $f = 0$. Ясно также, что $\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$. Рассмотрим выражение

$$\|f+g\|^4 = \sum_{p,q}\sum_{\vec{s}}\prod_{\varepsilon\in\{0,1\}^2}\mathcal{C}^{|\varepsilon|}(f+g)(\vec{s}+\varepsilon_1 p\vec{e}_1+\varepsilon_2 q\vec{e}_2). \qquad (19)$$

Раскрыв все скобки в произведении из (19), мы получим 16 слагаемых вида $\prod_{\varepsilon\in\{0,1\}^2}\mathcal{C}^{|\varepsilon|}f_\varepsilon(\vec{s}+\varepsilon_1 p\vec{e}_1+\varepsilon_2 q\vec{e}_2)$, где функция f_ε равна либо f, либо g. Рассмотрим одно из этих слагаемых σ. Пусть k – число функций f_ε в σ, равных функции f, а l – число функций f_ε в σ, равных функции g, $l+k=4$. По лемме 4 σ оценивается выражением $\|f\|^k\,\|g\|^l$. Значит,

$$\|f+g\|^4 \leqslant \sum_{k=0}^{4} C_4^k \|f\|^k\,\|g\|^{4-k} = (\|f\|+\|g\|)^4.$$

Лемма доказана.

Теорема 5 (комбинаторный смысл понятия α-равномерности). *Пусть множество A α-равномерно относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и $\sum_p (\delta_p - \delta)^2 \leqslant \alpha N$. Тогда A содержит не более $(\delta + 2\alpha^{1/4})^4 N^4$ простейших прямоугольников.*

Доказательство. Пусть χ – характеристическая, а f – балансовая функции множества A. По определению балансовой функции $\chi = f + \delta + (\delta_m - \delta)$. Поскольку множество A является α-равномерным, то $\|f\| \leqslant \alpha^{1/4} N$. Далее,

$$\|(\delta_m - \delta)\| = N^{1/2} \Big(\sum_p (\delta_p - \delta)^2 \Big)^{1/2} \leqslant \alpha^{1/2} N.$$

Количество простейших прямоугольников в A равно $\|\chi\|^4$. По лемме 5 имеем

$$\|\chi\| \leqslant \|\delta\| + \|f\| + \|(\delta_m - \delta)\|,$$

откуда получаем $\|\chi\|^4 \leqslant (\delta + 2\alpha^{1/4})^4 N^4$. Теорема доказана.

Пусть Q_1 и Q_2 – некоторые подмножества множества $E_1 \times E_2 \subseteq \mathbb{Z}_N^2$, а h и g – их характеристические функции. Пусть также $|E_1| = \beta_1 N$, $|E_2| = \beta_2 N$.

Теорема 6. *Пусть функция $f\colon E_1 \times E_2 \to D$ является α-равномерной относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и множества E_1, E_2 являются α_0-равномерными, $\alpha_0 = 2^{-12} \alpha^3 \beta_1^{24} \beta_2^{24}$. Тогда*

$$\Big| \sum_{\vec{s} \in \mathbb{Z}_N^2} \sum_{r \in \mathbb{Z}_N} h(\vec{s})\, g(\vec{s} + r(\vec{e}_1 + \vec{e}_2))\, f(\vec{s} + r\vec{e}_2) \Big| \leqslant 2\alpha^{1/4} \beta_1^2 \beta_2^2 N^3.$$

Доказательство. Пусть $\vec{e} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{s} = k\vec{e}_1 + m\vec{e}_2$, $\chi(\vec{s}) = \chi_{E_1 \times E_2}(\vec{s})$ и $\chi_1(k) = \chi_{E_1}(k)$, $\chi_2(m) = \chi_{E_2}(m)$. По неравенству Коши–Буняковского имеем

$$\begin{aligned}
\sigma &= \Big| \sum_{\vec{s} \in \mathbb{Z}_N^2} \sum_{r \in \mathbb{Z}_N} h(\vec{s})\, g(\vec{s} + r\vec{e})\, f(\vec{s} + r\vec{e}_2) \Big|^2 \\
&\leqslant \Big(\sum_{\vec{s}} |h(\vec{s})|^2 \Big) \Big(\sum_{\vec{s}} \chi(\vec{s}) \Big| \sum_r g(\vec{s} + r\vec{e})\, f(\vec{s} + r\vec{e}_2) \Big|^2 \Big) \\
&= \Big(\sum_{\vec{s}} |h(\vec{s})|^2 \Big) \Big(\sum_{\vec{s}} \chi(\vec{s}) \sum_{r,p} g(\vec{s} + r\vec{e})\, \overline{g(\vec{s} + p\vec{e})}\, f(\vec{s} + r\vec{e}_2)\, \overline{f(\vec{s} + p\vec{e}_2)} \Big) \\
&= \|h\|_2^2 \sum_{\vec{s}} \sum_{r,u} \chi(\vec{s} - r\vec{e})\, g(\vec{s})\, \overline{g(\vec{s} + u\vec{e})}\, f(\vec{s} - r\vec{e}_1)\, \overline{f(\vec{s} + u\vec{e}_2 - r\vec{e}_1)} = \sigma_1. \quad (20)
\end{aligned}$$

Функция f равна нулю вне $E_1 \times E_2$, следовательно, $f(\vec{s} - r\vec{e}_1) = \chi_1(k - r) \times f(\vec{s} - r\vec{e}_1)$. Отсюда $\chi(\vec{s} - r\vec{e})\, f(\vec{s} - r\vec{e}_1) = \chi_1(k - r)\, \chi_2(m - r)\, f(\vec{s} - r\vec{e}_1) = \chi_2(m - r)\, f(\vec{s} - r\vec{e}_1)$. Значит,

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \|h\|_2^2 \sum_{\vec{s}} \sum_{u,r} \chi_2(m - r)\, g(\vec{s})\, \overline{g(\vec{s} + u\vec{e})}\, f(\vec{s} - r\vec{e}_1)\, \overline{f(\vec{s} + u\vec{e}_2 - r\vec{e}_1)} \\
&= \|h\|_2^2 \sum_{\vec{s}} \sum_{u} g(\vec{s})\, \overline{g(\vec{s} + u\vec{e})} \sum_r \chi_2(m - r)\, f(k - r, m)\, \overline{f(k - r, m + u)}
\end{aligned}$$

$$= \|h\|_2^2 \sum_{\vec{s}} \sum_{u} g(\vec{s})\,\overline{g(\vec{s}+u\vec{e})} \sum_{r} \chi_2(r+m-k)\, f(r,m)\,\overline{f(r,m+u)}$$
$$= \|h\|_2^2 \sum_{m,u} \sum_{r} f(r,m)\,\overline{f(r,m+u)} \sum_{k} \chi_2(r+m-k)\, g(k,m)\,\overline{g(k+u,m+u)}.$$

По лемме 1, 3), для всех, кроме, может быть, $\alpha_0^{1/6}N$, значений r справедливо неравенство

$$\Big|\sum_{k} \chi_2(r+m-k)\, g(k,m)\,\overline{g(k+u,m+u)} - \beta_2 \sum_{k} g(k,m)\,\overline{g(k+u,m+u)}\Big| \leqslant \alpha_0^{1/6}N.$$

Используя оценку для α_0, получаем

$$\sigma_1 \leqslant \beta\|h\|_2^2 \sum_{m,u}\sum_{k} g(k,m)\,\overline{g(k+u,m+u)}\Big|\sum_{r} f(r,m)\,\overline{f(r,m+u)}\Big| + 2\alpha_0^{1/6}N^6$$
$$\leqslant \beta\|h\|_2^2 \sum_{m,u}\sum_{k} \chi(k,m)\,\overline{\chi(k+u,m+u)}\Big|\sum_{r} f(r,m)\,\overline{f(r,m+u)}\Big| + 2\alpha_0^{1/6}N^6.$$

Имеем

$$\sum_{k} \chi(k,m)\,\overline{\chi(k+u,m+u)} = \chi_2(m)\,\overline{\chi_2(m+u)} \sum_{k} \chi_1(k)\,\overline{\chi_1(k+u)}.$$

Пользуясь α_0-равномерностью множества E_1 и леммой 1, 3), получаем

$$|\sigma_1|^2 \leqslant 2\beta_2^2\|h\|_2^4\beta_1^4N^2\Big|\sum_{m,u}\chi_2(m)\,\overline{\chi_2(m+u)}\Big|\sum_{r} f(r,m)\,\overline{f(r,m+u)}\Big|\Big|^2 + 2^5\alpha_0^{1/3}N^{12}.$$

По неравенству Коши–Буняковского имеем

$$|\sigma_1|^2 \leqslant 2\beta_1^4\beta_2^2\|h\|_2^4N^2\Big(\sum_{m,u}\chi_2(m)\chi_2(m+u)\Big)\|f\|^4 + 2^5\alpha_0^{1/3}N^{12}$$
$$\leqslant 4\beta_1^4\beta_2^2N^2\big(\beta_1\beta_2N^2\big)^2\beta_2^2N^2\alpha\big(\beta_1^2\beta_2^2N^4\big) = 4\alpha\beta_1^8\beta_2^8N^{12}.$$

Значит, $\sigma \leqslant 2\alpha^{1/4}\beta_1^2\beta_2^2N^3$. Теорема доказана.

Докажем основную теорему настоящего параграфа.

Теорема 7. *Пусть множество A принадлежит $E_1 \times E_2$ и имеет мощность $|A| = \delta|E_1|\,|E_2|$. Пусть $|E_1| = \beta_1 N$, $|E_2| = \beta_2 N$ и множества E_1, E_2 являются $(10^{-330}\beta_1^{24}\beta_2^{24}\delta^{132})$-равномерными. Пусть также A является α-равномерным относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\alpha = 10^{-108}\delta^{44}$, $N \geqslant 10^{10}(\delta^4\beta_1\beta_2)^{-1}$ и $\sum_m |\delta_m - \delta|^2 \leqslant \alpha\beta_2 N$. Тогда A содержит уголок.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon = 2^{-20}\delta^2$. Пусть также c – натуральное число такое, что $[\varepsilon N]c \leqslant N < [\varepsilon N](c+1)$. Пусть

$$\{1, 2, \ldots, N\} = R_1 \sqcup R_2 \sqcup \cdots \sqcup R_c \sqcup R_{c+1},$$

где R_l, $l=1,\dots,c$, – прогрессии с шагом один и длиной $[\varepsilon N]$, $R_1=\{1,2,\dots,[\varepsilon N]\}$ и R_{c+1} – некоторая арифметическая прогрессия с шагом один.

Разобьем $\mathbb{Z}_N^2$ на квадраты $R_l\times R_q$, $l,q=1,2,\dots,c$. Пусть номер квадрата $R_l\times R_q$ равен $(q-1)c+l$. Рассмотрим две двумерные арифметические прогрессии $R_{c+1}\times\{1,2,\dots,N\}$ и $\{1,2,\dots,N\}\times R_{c+1}$. По лемме 2 в этих прогрессиях находится не более $4\varepsilon\beta_1\beta_2N^2+4\varepsilon\beta_1\beta_2N^2=8\varepsilon\beta_1\beta_2N^2$ точек множества $E_1\times E_2$. Обозначим через A_i пересечение A с i-м квадратом. Пусть общее количество нумерованных квадратов равно t, $t=c^2$, и пусть i-й квадрат равен $P_i\times S_i$. Пусть также $\vec{e}=\vec{e}_1+\vec{e}_2$, $\vec{s}=k\vec{e_1}+m\vec{e}$. Обозначим через χ_i характеристическую функцию множества A_i. Поскольку $\varepsilon=2^{-20}\delta^2$, то

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{k,m}\chi_i(k,m)\geqslant(1-2^{-5})\delta\beta_1\beta_2N^2.$$

Разобьем множество $\{1,\dots,c\}$ на три арифметические прогрессии K_1, K_2, K_3 с шагом один так, чтобы их длины отличались не более чем на 1. Тогда все нумерованные квадраты разобьются на девять подмножеств. Для одного из девяти подмножеств, скажем V, справедливо неравенство

$$\sum_{i\in V}\sum_{k,m}\chi_i(k,m)\geqslant 10^{-1}\delta\beta_1\beta_2N^2.$$

По неравенству Коши–Буняковского имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{100}\,\delta^2\beta_1^2\beta_2^2N^3&\leqslant\sum_k\Big(\sum_{m,i}\chi_i(k,m)\Big)^2=\sum_{i,j=1}^{t}\sum_k\Big(\sum_m\chi_i(k,m)\Big)\Big(\sum_m\chi_j(k,m)\Big)\\&=\sum_{i\neq j}\sum_k\Big(\sum_m\chi_i(k,m)\Big)\Big(\sum_m\chi_j(k,m)\Big)+\sum_i\sum_k\Big(\sum_m\chi_i(k,m)\Big)^2.\end{aligned}\tag{21}$$

Оценим второе слагаемое в (21). Пусть $\zeta=10^{-330}\beta_1^{24}\beta_2^{24}\delta^{132}$. По лемме 1 существует не менее чем $(1-\zeta^{1/6})N$ значений k, для которых выполнено неравенство

$$\Big|\sum_m\chi_{E_1}(k+m)\,\chi_{E_2\cap S_i}(m)-\beta_1|E_2\cap S_i|\Big|\leqslant\zeta^{1/6}N.$$

По лемме 2 имеем $|E_2\cap S_i|=|(E_2\times\{1\})\cap(S_i\times\{1\})|\leqslant 4\varepsilon\beta_2N$. Значит, существует не менее чем $(1-\zeta^{1/6})N$ значений k, для которых справедливо неравенство

$$\sum_m\chi_{E_1}(k+m)\,\chi_{E_2\cap S_i}(m)\leqslant 8\varepsilon\beta_1\beta_2N.\tag{22}$$

Обозначим через B множество тех k, для которых (22) не выполнено. Тогда $|B|\leqslant\zeta^{1/6}N$. Поскольку

$$\sum_m\chi_i(k,m)=\sum_m\chi_{E_1\cap P_i}(k+m)\,\chi_{E_2\cap S_i}(m)\leqslant\sum_m\chi_{E_1}(k+m)\,\chi_{E_2\cap S_i}(m),$$

$$\chi_i(k,m)\leqslant\chi_{E_1}(k+m)\chi_{E_2\cap S_i}(m)\leqslant\chi_{E_2\cap S_i}(m),$$

то

$$\sum_i \sum_k \Big(\sum_m \chi_i(k,m) \Big)^2 = \sum_i \sum_{k\in B} \Big(\sum_m \chi_i(k,m) \Big)^2 + \sum_i \sum_{k\notin B} \Big(\sum_m \chi_i(k,m) \Big)^2$$
$$\leqslant \zeta^{1/6} N \sum_i \Big| \sum_m \chi_{E_2\cap S_i}(m) \Big|^2 + 8\varepsilon\beta_1\beta_2 N \sum_i \sum_k \sum_m \chi_i(k,m) = \sigma.$$

Применяя лемму 2 еще раз, получаем

$$\sigma \leqslant 16\zeta^{1/6} N(\varepsilon\beta_2 N)^2 t + 8\varepsilon\beta_1\beta_2 N \beta_1\beta_2 N^2 \leqslant 10\varepsilon\beta_1^2\beta_2^2 N^3,$$

откуда имеем

$$\sum_{i\neq j} \sum_k \Big(\sum_m \chi_i(k,m) \Big) \Big(\sum_m \chi_j(k,m) \Big) \geqslant \frac{1}{200}\, \delta^2 \beta_1^2 \beta_2^2 N^3. \tag{23}$$

Из формулы (23) вытекает, что существуют индексы i_0, j_0, $i_0 \neq j_0$, для которых выполнено

$$\sum_k \Big(\sum_m \chi_{i_0}(k,m) \Big) \Big(\sum_m \chi_{j_0}(k,m) \Big) \geqslant 10^{-26} \delta^{10} \beta_1^2 \beta_2^2 N^3. \tag{24}$$

Пусть $i_0 < j_0$. Обозначим A_{i_0} через Q_1, а A_{j_0} – через Q_2. Рассмотрим сумму

$$\sum_{\vec{s}} \sum_r \chi_{Q_1}(\vec{s})\, \chi_{Q_2}(\vec{s} + r\vec{e})\, \chi_A(\vec{s} + r\vec{e}_2). \tag{25}$$

Пользуясь равенством $\chi_{Q_1}(\vec{s})\, \chi_{Q_2}(\vec{s}+r\vec{e})\, \chi_{E_1\times E_2}(\vec{s}+r\vec{e}_2) = \chi_{Q_1}(\vec{s})\, \chi_{Q_2}(\vec{s}+r\vec{e})$, запишем сумму (25) в виде

$$\sum_{\vec{s}} \sum_r \chi_{Q_1}(\vec{s}) \chi_{Q_2}(\vec{s} + r\vec{e}) (\delta_{m+r} \chi_{E_1\times E_2}(\vec{s} + r\vec{e}_2) + f_A(\vec{s} + r\vec{e}_2))$$
$$= \sum_{\vec{s}} \sum_r \chi_{Q_1}(\vec{s})\, \chi_{Q_2}(\vec{s} + r\vec{e})\, \chi_{E_1\times E_2}(\vec{s} + r\vec{e}_2) \delta_{m+r}$$
$$+ \sum_{\vec{s}} \sum_r \chi_{Q_1}(\vec{s})\, \chi_{Q_2}(\vec{s} + r\vec{e})\, f_A(\vec{s} + r\vec{e}_2)$$
$$= \sum_{\vec{s}} \sum_r \chi_{Q_1}(\vec{s})\, \chi_{Q_2}(\vec{s} + r\vec{e}) \delta_{m+r}$$
$$+ \sum_{\vec{s}} \sum_r \chi_{Q_1}(\vec{s})\, \chi_{Q_2}(\vec{s} + r\vec{e})\, f_A(\vec{s} + r\vec{e}_2)$$
$$= \delta \sum_{\vec{s}} \sum_r \chi_{Q_1}(\vec{s})\, \chi_{Q_2}(\vec{s} + r\vec{e}) + \sum_{\vec{s}} \sum_r \chi_{Q_1}(\vec{s})\, \chi_{Q_2}(\vec{s} + r\vec{e}) (\delta_{m+r} - \delta)$$
$$+ \sum_{\vec{s}} \sum_r \chi_{Q_1}(\vec{s})\, \chi_{Q_2}(\vec{s} + r\vec{e})\, f_A(\vec{s} + r\vec{e}_2). \tag{26}$$

По теореме 6 третье слагаемое в равенстве (26) не превосходит по модулю $2\alpha^{1/4}\beta_1^2\beta_2^2 N^3$. Из неравенства (24) вытекает, что первый член в (26) не меньше $10^{-26}\delta^{11}\beta_1^2\beta_2^2 N^3$. Оценим второе слагаемое в (26). Обозначим через H множество тех $m \in E_2$, для которых не выполнено неравенство $|\delta_m - \delta| \leqslant \alpha^{1/3}$.

Поскольку по условию $\sum_m |\delta_m - \delta|^2 \leqslant \alpha\beta_2 N$, то $|H| \leqslant \alpha^{1/3}\beta_2 N$. Пусть теперь $\vec{s} = k\vec{e}_1 + m\vec{e}_2$. Имеем

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{\vec{s}}\sum_{r} \chi_{Q_1}(\vec{s})\,\chi_{Q_2}(\vec{s}+r\vec{e})(\delta_{m+r}-\delta)\Big| \\ = \Big|\sum_{k,m,r} \chi_{Q_1}(k,m)\,\chi_{Q_2}(k+r,m+r)(\delta_{m+r}-\delta)\Big| \\ = \Big|\sum_{k,r}\sum_{m} \chi_{Q_1}(k,m-r)\,\chi_{Q_2}(k+r,m)(\delta_{m}-\delta)\Big| = \sigma_1 = \sigma_2+\sigma_3,\end{aligned}$$

где через σ_2, σ_3 обозначены суммы по всем $m \notin H$ и всем $m \in H$ соответственно. Множества E_1, E_2 являются $(10^{-330}\beta_1^{24}\beta_2^{24}\delta^{132})$-равномерными. Пользуясь леммой 1, получаем

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \Big|\sum_{k,r}\sum_{m\notin H} \chi_{Q_1}(k,m-r)\,\chi_{Q_2}(k+r,m)(\delta_m-\delta)\Big| \\ &\leqslant \alpha^{1/3}\sum_{k,r}\sum_{m} \chi_{E_1}(k)\,\chi_{E_1}(k+r)\,\chi_{E_2}(m)\,\chi_{E_2}(m-r) \leqslant 2\alpha^{1/4}\beta_1^2\beta_2^2N^3. \qquad (27)\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\sigma_3 &= \Big|\sum_{k,r}\sum_{m\in H} \chi_{Q_1}(k,m-r)\,\chi_{Q_2}(k+r,m)(\delta_m-\delta)\Big| \\ &\leqslant \sum_{k,r}\sum_{m} \chi_{E_1}(k)\,\chi_{E_1}(k+r)\,\chi_{H}(m)\,\chi_{E_2}(m-r). \qquad (28)\end{aligned}$$

Обозначим через T_1 множество тех r, для которых выполнено

$$\Big|\sum_{k} \chi_{E_1}(k)\,\chi_{E_1}(k+r) - \beta_1^2 N\Big| \geqslant \zeta^{1/6}N,$$

а через T_2 множество тех r, для которых

$$\Big|\sum_{k} \chi_{H}(k)\,\chi_{E_2}(k+r) - \beta_2|H|\Big| \geqslant \zeta^{1/6}N.$$

По лемме 1 $|T_1|, |T_2| \leqslant \zeta^{1/6}N$. Отсюда имеем

$$\begin{aligned}\sigma_3 &\leqslant \sum_{r\in(T_1\cup T_2)} \Big(\sum_{k} \chi_{E_1}(k)\,\chi_{E_1}(k+r)\Big)\Big(\sum_{m} \chi_{H}(m)\,\chi_{E_2}(m-r)\Big) \\ &\quad + \sum_{r\notin(T_1\cup T_2)} \Big(\sum_{k} \chi_{E_1}(k)\,\chi_{E_1}(k+r)\Big)\Big(\sum_{m} \chi_{H}(m)\,\chi_{E_2}(m-r)\Big) \\ &\leqslant 2\zeta^{1/6}N^3 + N\beta_1^2N\beta_2|H| + 2\zeta^{1/6}N^3 \leqslant 2\alpha^{1/4}\beta_1^2\beta_2^2N^3. \qquad (29)\end{aligned}$$

Используя (27) и (29), получаем оценку $\sigma_1 \leqslant 4\alpha^{1/4}\beta_1^2\beta_2^2N^3$.

Поскольку $\alpha = 10^{-108}\delta^{44}$, то сумма (25) не меньше $10^{-27}\delta^{11}\beta_1^2\beta_2^2N^3$. Вследствие выбора Q_1 и Q_2 сумма (25) равна количеству троек вида $\{(k,m), (k+d,m-d), (k,m-d)\}$ в $Q_1 \times Q_2 \times A$. Так как $N \geqslant 10^{10}(\delta^4\beta_1\beta_2)^{-1}$, то $10^{-27}\delta^{11}\beta_1^2\beta_2^2N^3 > 1$. Значит, A содержит уголок. Теорема доказана.

§ 3. Графы

Рассмотрим множество $\mathbb{Z}_N^2$ как двумерную решетку с базисом $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Тогда каждая точка из $\mathbb{Z}_N^2$ однозначно представляется своими координатами в этом базисе.

Пусть множество A принадлежит некоторому квадрату $E_1 \times E_2$ двумерной решетки $\mathbb{Z}_N^2$. Пусть множества E_1, E_2 имеют мощность n. Мы свяжем с A двудольный ориентированный граф G_A (см. [12]–[?]). Пусть ψ и ρ – два биективных отображения множеств E_1 и E_2 в непересекающиеся множества W и V соответственно. Пусть $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ и $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Множество вершин двудольного графа G_A состоит из множеств W и V. Вершину v_j соединим ребром с вершиной w_i, если и только если $(\psi^{-1}(i), \rho^{-1}(j)) \in A$. *Окрестностью* A_v вершины $v \in V$ мы будем называть множество $\{w_i \in W \,|\, (v, w_i)$ – ребро в $G_A\}$.

В работе [7] с множеством $A \subseteq \mathbb{Z}_N$ связывался другой граф G'_A. Множество вершин этого графа равно $\mathbb{Z}_N$, точка x соединена с точкой y тогда и только тогда, когда $y - x \in A$. На самом деле эти определения в некотором смысле совпадают. Пусть A – произвольное подмножество в $\mathbb{Z}_N$. Построим множество A^* – "вложение" A в $\mathbb{Z}_N^2$ – по следующему правилу: $(x, y) \in A^*$ тогда и только тогда, когда $x = a - y$, где $a \in A$. Несложно проверить, что отображение $\phi\colon A^* \to A$, $\phi(x, y) = x + y$, задает гомоморфизм Фреймана [15] порядка 2.

Пользуясь этим вложением, мы докажем следующее предложение.

Предложение 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что для всех натуральных $N \geqslant N_\varepsilon$ существует множество $Q \subseteq \{1, \dots, N\}^2$ мощности не меньше чем $N^{2 - \frac{\log 2 + \varepsilon}{\log \log N}}$, не содержащее уголков.*

Доказательство. По теореме Беренда [11] для любого $\varepsilon > 0$ существует $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что для всех натуральных $K \geqslant K_\varepsilon$ найдется множество $A \subseteq \{1, \dots, K\}$, не содержащее арифметических прогрессий длины 3 и имеющее мощность $|A| > K^{1 - \frac{\log 2 + \varepsilon}{\log \log K}}$. Применяя теорему Беренда с параметрами $\varepsilon > 0$, $K = [N/3]$, находим множество A.

Рассмотрим множество $\mathbb{Z}_N^2$ и занумеруем его горизонтали, начиная снизу. Пусть множество A принадлежит отрезку натурального ряда $[K, K + 1, \dots$ $\dots, 2K - 1]$. Рассмотрим трансляции A вида $\{(A + i - 1) \times \{i\}\}_{i=1}^K \subseteq \mathbb{Z}_N^2$. Пусть Q – объединение всех трансляций. Легко убедиться в том, что Q не содержит уголков. Кроме того, Q имеет мощность не меньше чем $N^{2 - \frac{\log 2 + \varepsilon}{\log \log N}}/10$. Предложение доказано.

Квадратная матрица M называется *неотрицательной*, если все ее элементы неотрицательны. Мы выделим результаты о неотрицательных матрицах в следующую теорему (см., например, [16]).

Теорема 8. *Пусть M – неотрицательная матрица. Тогда*:

1) *M имеет действительное собственное значение r, равное спектральному радиусу M*;

2) *существует неотрицательный собственный вектор, соответствующий собственному значению r.*

Пусть $M = (m_{ij})$ – матрица инцидентности графа G_A, а $T = MM^T$. Пусть также $\mu_1, \dots, \mu_n$ – собственные значения матрицы T, занумерованные в порядке убывания: $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \dots \geqslant \mu_n \geqslant 0$, а $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ – соответствующие им собственные векторы. Пусть для всех $i = 1, \dots, n$ выполнено $\|\vec{u}_i\|_2^2 = n$. Обозначим через $\vec{u}$ вектор $(1, \dots, 1)$. В доказательстве мы будем использовать матрицу T. Можно было бы обойтись без этой дополнительной матрицы, а работать только с матрицей M, но для этого необходимо было бы вводить некоторые новые понятия. Кроме того, доказательство с матрицей T короче.

Пусть α_1 – вещественное число, $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant 1$. Пусть плотности δ_m множества $A \subseteq E_1 \times E_2$, $|A| = \delta|E_1|\,|E_2|$, обладают свойством

$$\sum_{m \in E_2} (\delta_m - \delta)^2 \leqslant \alpha_1^2 |E_2|. \tag{30}$$

Далее мы будем подразумевать, что условие (30) выполнено. Кроме того, мы будем считать, что выполнено условие, налагаемое на плотности γ_k:

$$\sum_{k \in E_1} (\gamma_k - \delta)^2 \leqslant \alpha_1^2 |E_1|. \tag{31}$$

Лемма 6. *Пусть $\vec{a}$ – произвольный вектор из $\mathbb{C}^n$, а $C = (c_{ij})$ – вещественная $(n \times n)$-матрица. Тогда выполнено неравенство $(C\vec{a}, C\vec{a}\,) \leqslant \|\vec{a}\|^2 \sum_i \sum_j c_{ij}^2$.*

Доказательство. По неравенству Коши–Буняковского имеем

$$(C\vec{a}, C\vec{a}\,) = \sum_i \Big| \sum_j c_{ij} a_j \Big|^2 \leqslant \sum_i \sum_j c_{ij}^2 \sum_j |a_j|^2 = (\vec{a}, \vec{a}\,) \sum_i \sum_j c_{ij}^2.$$

Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть ε – любое число из интервала $(0, 1)$. Пусть множество $A \subseteq E_1 \times E_2$, $|E_1| = |E_2| = n$, имеет мощность $|A| = \delta n^2$. Тогда $\mu_1 \geqslant \delta^2 n^2$. Если $\|\vec{u}_1 - \vec{u}\|^2 \leqslant \varepsilon^2 n$, то $\mu_1 < \delta^2 n^2 + (2\varepsilon + \alpha_1^2) n^2$.*

Доказательство. Пусть $M = (m'_{ij})$. По свойству экстремальности собственных значений имеем

$$\mu_1 n \geqslant \big(M^T \vec{u}, M^T \vec{u}\,\big) = \sum_i \Big(\sum_j m'_{ij} \Big)^2. \tag{32}$$

Используя соотношение (32), неравенство Коши–Буняковского и тот факт, что $\sum_{i,j} m'_{ij} = |A| = \delta n$, получаем

$$\mu_1 \geqslant \frac{1}{n} \sum_i \Big(\sum_j m'_{ij} \Big)^2 \geqslant \frac{1}{n^2} \Big(\sum_{i,j} m'_{ij} \Big)^2 = \delta^2 n^2.$$

Пусть теперь $\|\vec{u}_1 - \vec{u}\|^2 \leqslant \varepsilon^2 n$. Имеем

$$\big(M^T \vec{u}_1, M^T \vec{u}_1\big) = \big(M^T \vec{u}, M^T \vec{u}\,\big) + \big(M^T (\vec{u}_1 - \vec{u}\,), M^T \vec{u}\,\big) + \big(M^T \vec{u_1}, M^T (\vec{u}_1 - \vec{u}\,)\big).$$

Оценим слагаемое $\big(M^T\vec{u_1}, M^T(\vec{u}_1 - \vec{u}\,)\big) = \sigma$. По неравенству Коши–Буняковского имеем

$$\big(M^T\vec{u_1}, M^T(\vec{u}_1 - \vec{u}\,)\big)^2 \leqslant \big(M^T\vec{u_1}, M^T\vec{u_1}\big)\,\big(M^T(\vec{u_1} - \vec{u}\,), M^T(\vec{u_1} - \vec{u}\,)\big).$$

Применяя лемму 6 и учитывая, что $\sum_i \sum_j m_{ij}^2 \leqslant n^2$, получаем

$$|\sigma|^2 \leqslant \|\vec{u}_1\|^2 n^2 \|\vec{u_1} - \vec{u}\|^2 n^2 \leqslant \varepsilon^2 n^6.$$

Значит, $\big|\big(M^T\vec{u_1}, M^T(\vec{u}_1 - \vec{u}\,)\big)\big| \leqslant \varepsilon n^3$. Аналогично, $\big|\big(M^T(\vec{u}_1 - \vec{u}\,), M^T\vec{u}\,\big)\big| \leqslant \varepsilon n^3$. Таким образом,

$$\mu_1 n = \big(M^T\vec{u}_1, M^T\vec{u}_1\big) \leqslant \big(M^T\vec{u}, M^T\vec{u}\,\big) + 2\varepsilon n^3.$$

Имеем $\big(M^T\vec{u}, M^T\vec{u}\,\big) = \sum_i \big(\sum_j m'_{ij}\big)^2 = n^2 \sum_i \delta_i^2$. Заметим, что неравенство (30) можно переписать в виде $\sum_m \delta_m^2 \leqslant (\alpha_1^2 + \delta^2)n$. Отсюда имеем

$$\mu_1 n \leqslant \delta^2 n^3 + 2\varepsilon n^3 + \alpha_1^2 n^3.$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Матрица инцидентности графа G_{A^*} имеет собственные числа, которые равны коэффициентам Фурье множества A, а собственные векторы имеют вид

$$\vec{v}_r = \big(e^{2(N-1)\pi ir/N}, e^{2(N-2)\pi ir/N}, \ldots, e^{2\pi ir/N}, 1\big), \qquad r = \overline{0, N-1}.$$

Следующая лемма показывает, что α-равномерность эквивалентна квазислучайности графа G_A (см. [10]).

Лемма 8. *Пусть множество $A \subseteq E_1 \times E_2$, $|E_1| = |E_2| = n$, имеет мощность $|A| = \delta n^2$ и $\varepsilon \in (0,1)$. Если множество A является α-равномерным относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и $\|\vec{u}_1 - \vec{u}\|^2 \leqslant \varepsilon^2 n$, то $\mu_2 < \alpha^{1/2} n^2 + 4\sqrt{\varepsilon}\, n^2 + 4\sqrt{\alpha_1}\, n^2$. Обратно, если $\mu_2 < \eta n^2$ и $\|\vec{u}_1 - \vec{u}\|^2 \leqslant \varepsilon^2 n$, то множество A α-равномерно относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\alpha = \eta + 16\varepsilon + 16\alpha_1$.*

Доказательство. Поскольку $\operatorname{tr}(T) = \operatorname{tr}\big(MM^T\big) = \sum_{i=1}^n \mu_i = \sum_{k,i} m_{ik}^2 = \delta n^2$, то мы имеем формулу

$$\sum_{i=1}^n \mu_i = \delta n^2. \tag{33}$$

Обозначим через A_p окрестность вершины v_p в графе G_A. Так как $\operatorname{tr}(T^2) = \sum_{i=1}^n \mu_i^2 = \sum_{p,q} \big|\sum_k m_{pk} m_{qk}\big|^2$, то $\sum_{i=1}^n \mu_i^2 = \sum_{p,q} |A_p \cap A_q|^2$. Поскольку $\|\vec{u}_1 - \vec{u}\|^2 \leqslant \varepsilon^2 n$, то по лемме 7 имеем $\delta^2 n^2 \leqslant \mu_1 \leqslant \delta^2 n^2 + 2\varepsilon n^2 + \alpha_1^2 n^2$ и, следовательно,

$$\sum_{p,q=1}^n |A_p \cap A_q|^2 - \delta^4 n^4 = \sum_{i=1}^n \mu_i^2 - \delta^4 n^4 = \sum_{i=2}^n \mu_i^2 + \theta(12\varepsilon + 3\alpha_1^2) n^4, \tag{34}$$

где $|\theta| \leqslant 1$.

Пусть $\vec{s} = k\vec{e}_1 + l\vec{e}_2$ и $f(\vec{s}) = f(k,l)$ – балансовая функция множества A. Обозначим через B_l множество всех точек из A, принадлежащих l-й горизонтали. Имеем

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sum_{l,t=1}^{N} \Big| \sum_{k=1}^{N} f(k,l)\,\overline{f(k,t)} \Big|^2 \\
&= \sum_{l,t=1}^{N} | \sum_{k=1}^{N} \Big(\chi_A(k,l) - \delta_l \chi_{E_1\times E_2}(k,l) \Big) \Big(\chi_A(k,t) - \delta_l \chi_{E_1\times E_2}(k,t) \Big) |^2 \\
&= \sum_{l,t\in E_2} \big|\, |B_l \cap B_t| - \delta_l\delta_t n \big|^2 \\
&= \sum_{l,t\in E_2} |B_l \cap B_t|^2 - 2n \sum_{l,t\in E_2} \delta_l\delta_t |B_l \cap B_t| + n^2 \sum_{l,t\in E_2} \delta_l^2\delta_t^2 \\
&= \sum_{l,t\in E_2} |B_l \cap B_t|^2 - 2n \sum_{v\in E_1} \Big(\sum_{l\in E_2} \delta_l \chi_A(v,l) \Big)^2 + n^2 \Big(\sum_{l\in E_2} \delta_l^2 \Big)^2 . \qquad (35)
\end{aligned}$$

Оценим третье слагаемое в (35). По неравенству Коши–Буняковского

$$n^2 \Big(\sum_{l\in E_2} \delta_l^2 \Big)^2 \geqslant \delta^4 n^4 . \qquad (36)$$

С другой стороны, неравенство (30) можно переписать в виде $\sum_{l\in E_2} \delta_l^2 \leqslant (\delta^2 + \alpha_1^2)n$, следовательно,

$$n^2 \Big(\sum_{l\in E_2} \delta_l^2 \Big)^2 \leqslant \delta^4 n^4 + 3\alpha_1^2 n^4 . \qquad (37)$$

Из неравенств (36) и (37) вытекает, что

$$n^2 \sum_{l,t\in E_2} \delta_l^2\delta_t^2 = \delta^4 n^4 + 3\theta_1 \alpha_1^2 n^4 , \qquad (38)$$

где $|\theta_1| \leqslant 1$. Оценим теперь второе слагаемое в (35). Имеем

$$\sum_{l\in E_2} \delta_l \chi_A(v,l) = \sum_{l\in E_2} (\delta_l - \delta)\,\chi_A(v,l) + \delta \sum_{l\in E_2} \chi_A(v,l) = \sum_{l\in E_2} (\delta_l - \delta)\,\chi_A(v,l) + n\delta\gamma_v .$$

Применяя (30) и неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\Big(\sum_{l\in E_2} (\delta_l - \delta)\,\chi_A(v,l) \Big)^2 \leqslant \sum_{l\in E_2} (\delta_l - \delta)^2 \sum_{l\in E_2} \chi_A^2(v,l) \leqslant \alpha_1^2 \gamma_v n^2 .$$

Пусть $\rho(v) = \sum_{l\in E_2} (\delta_l - \delta)\,\chi_A(v,l)$. Тогда $|\rho(v)| \leqslant \alpha_1 \gamma_v^{1/2} n$. Запишем второе слагаемое из (35) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= 2n \sum_{v\in E_1} \Big(\sum_{l\in E_2} \delta_l \chi_A(v,l) \Big)^2 = 2n \sum_{v\in E_1} (\rho(v) + n\delta\gamma_v)^2 \\
&= 2n \Big(\sum_{v\in E_1} \rho^2(v) + 2n\delta \sum_{v\in E_1} \rho(v)\gamma_v + n^2\delta^2 \sum_{v\in E_1} \gamma_v^2 \Big) = 2n^3\delta^2 \sum_{v\in E_1} \gamma_v^2 + 6\theta_2\alpha_1 n^4 ,
\end{aligned} \qquad (39)$$

где $|\theta_2| \leqslant 1$. По неравенству Коши–Буняковского $\sum_{v\in E_1}\gamma_v^2 \geqslant \delta^2 n$. С другой стороны, по неравенству (31) $\sum_{v\in E_1}\gamma_v^2 \leqslant (\delta^2+\alpha_1^2)n$. Следовательно,

$$\sigma_1 = 2\delta^2 n^4 + 8\theta_3\alpha_1 n^4, \tag{40}$$

где $|\theta_3| \leqslant 1$. Подставляя неравенства (38) и (40) в (35), окончательно получаем

$$\sigma = \sum_{l,t\in E_2} |B_l \cap B_t|^2 - \delta^4 n^4 + 11\alpha_1\theta_4 n^4, \tag{41}$$

где $|\theta_4| \leqslant 1$. Ясно, что $\sum_{l,t\in E_2}|B_l\cap B_t|^2 = \sum_{p,q}|A_p\cap A_q|^2$. Подставляя это равенство и формулу (41) в (34), находим

$$\sum_{i=2}^{n}\mu_i^2 = \sum_{l,t=1}^{N}\Big|\sum_{k=1}^{N} f(k,l)\,\overline{f(k,t)}\Big|^2 + \theta_5 n^4(14\alpha_1+12\varepsilon), \tag{42}$$

где $|\theta_5| \leqslant 1$.

Если A α-равномерно, то $\sum_{l,t=1}^{N}\big|\sum_{k=1}^{N} f(k,l)\,\overline{f(k,t)}\,\big|^2 \leqslant \alpha n^4$. Отсюда получаем

$$\mu_2^2 \leqslant \sum_{i=2}^{n}\mu_i^2 \leqslant \alpha n^4 + 16\varepsilon n^4 + 16\alpha_1 n^4.$$

Значит, $\mu_2 < \alpha^{1/2}n^2 + 4\sqrt{\varepsilon}\,n^2 + 4\alpha_1^{1/2}n^2$. Обратно, если $\mu_2 < \eta n^2$, то по формулам (33) и (42)

$$\begin{aligned}\sum_{p,q}\Big|\sum_{k} f(k,p)\,\overline{f(k,q)}\Big|^2 &\leqslant \sum_{i=2}^{n}\mu_i^2 + 16\varepsilon n^4 + 16\alpha_1 n^4\\ &\leqslant \mu_2\sum_{i=2}^{n}\mu_i + 16\varepsilon n^4 + 16\alpha_1 n^4 < \eta\delta n^4 + 16\varepsilon n^4 + 16\alpha_1 n^4.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть B – $(n\times n)$-матрица, все элементы которой ограничены по модулю числом D. Пусть $\vec{v} = (v_1,\dots,v_n)$, $(\vec{v},\vec{v}) = n$, – собственный вектор матрицы B, отвечающий собственному значению λ, $|\lambda| \geqslant \alpha n D$, $0 < \alpha < 1$. Тогда для любого $\xi > 0$, $\xi < 1/2$, существуют натуральное число m, $m \leqslant 2^5/(\alpha\xi)^2$, комплексные числа $c_1,\dots,c_m$ и непересекающиеся множества $F_1,\dots,F_m \subseteq \{1,\dots,n\}$, обладающие свойствами*:

1) $\bigsqcup_{i=1}^{m} F_i = \{1,\dots,n\}$;
2) *для любого* $i\in\{1,\dots,m\}$ *и всех* $j\in F_i$ *выполнено* $|v_j - c_i| \leqslant \xi$;
3) *для любого* $i\in\{1,\dots,m\}$ *выполнено* $|c_i| \leqslant 1/\alpha$.

Доказательство. Обозначим через b_{ij} элементы матрицы B. По условию $|b_{ij}| \leqslant D$. Вектор $\vec{v}$ является собственным вектором матрицы B, отвечающим собственному значению λ. Для любого $i\in\{1,\dots,m\}$ имеем

$$|\lambda v_i| = \Big|\sum_{k=1}^{n} b_{ik}v_k\Big| \leqslant nD, \tag{43}$$

откуда для всех $i = 1,\dots,m$ выполнено $|v_i| \leqslant 1/\alpha$.

Пусть U – круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с центром в 0 и радиусом $1/\alpha$. По условию $0 < \alpha < 1$ и $0 < \xi < 1/2$. Отсюда $\xi < 1/(2\alpha)$. Пусть $l = [2\sqrt{2}/(\alpha\xi)] + 1$. Так как $\xi < 1/(2\alpha)$, то $1 \leqslant l \leqslant 4\sqrt{2}/(\alpha\xi)$. Разобьем квадрат $Q = [-1/\alpha, 1/\alpha] \times [-1/\alpha, 1/\alpha]$ на $m = l^2$ квадратов. У каждого такого квадрата сторона не больше чем $\xi/\sqrt{2}$ и, следовательно, диаметр не больше чем ξ. Поскольку $U \subseteq Q$, то множество U разбивается этими квадратами на m множеств $U_1, \ldots, U_m$, $m \leqslant 2^5/(\alpha\xi)^2$, так что $\operatorname{diam}(U_i) \leqslant \xi$, $i = 1, \ldots, m$. Пусть $c_1, \ldots, c_m$ – произвольные точки из $U_1, \ldots, U_m$. Рассмотрим множества

$$F_i = \{j \colon v_j \in U_i\}, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Множества $F_1, \ldots, F_m$ и числа $c_1, \ldots, c_m$ удовлетворяют всем утверждениям леммы. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть C – некоторое множество и $A \subseteq C$, $|A| = \delta|C|$. Пусть множества $Q_1, \ldots, Q_m$ образуют разбиение C. Обозначим через B множество тех i, для которых $|A \cap Q_i| < (\delta - \eta)|Q_i|$, $\eta > 0$. Тогда*

$$\sum_{i \notin B} |A \cap Q_i| \geqslant \delta \sum_{i \notin B} |Q_i| + \eta \sum_{i \in B} |Q_i|. \tag{44}$$

Доказательство. Имеем

$$\delta|C| = \sum_{i=1}^{m} |A \cap Q_i| = \sum_{i \in B} |A \cap Q_i| + \sum_{i \notin B} |A \cap Q_i| \leqslant (\delta - \eta) \sum_{i \in B} |Q_i| + \sum_{i \notin B} |A \cap Q_i|. \tag{45}$$

Из соотношения (45) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i \notin B} |A \cap Q_i| &\geqslant \delta|C| - \delta \sum_{i \in B} |Q_i| + \eta \sum_{i \in B} |Q_i| \\ &= \delta \sum_{i=1}^{m} |Q_i| - \delta \sum_{i \in B} |Q_i| + \eta \sum_{i \in B} |Q_i| = \delta \sum_{i \notin B} |Q_i| + \eta \sum_{i \in B} |Q_i|. \end{aligned} \tag{46}$$

Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть множество $A \subseteq E_1 \times E_2$, $|E_2| \leqslant |E_1|$, имеет мощность $|A| = \delta|E_1|\,|E_2|$. Тогда для любого $\zeta > 0$, $\zeta < \delta^2$, либо A удовлетворяет неравенствам* (30), (31) *при $\alpha_1 = \zeta$, либо существуют множества G_1 и G_2, $G_1 \subseteq E_1$, $G_2 \subseteq E_2$, для которых выполнено*

$$|A \cap (G_1 \times G_2)| > \left(\delta + \frac{\zeta^3}{8}\right)|G_1|\,|G_2|, \tag{47}$$

$$|G_1| > \frac{\zeta^3}{8}|E_1|, \qquad |G_2| > \frac{\zeta^3}{8}|E_2|. \tag{48}$$

Доказательство. Если выполнены оба неравенства (30), (31) при $\alpha_1 = \zeta$, то доказывать нечего. Пусть, например, не выполнено неравенство (30). Тогда существует не менее $\zeta^2|E_2|/2$ значений m, для которых $|\delta_m - \delta| > \zeta/2$. Пусть

$n = |E_2|$. Обозначим через B^+ множество тех m, для которых $\delta_m > \delta + \zeta/2$, а через B^- – множество тех m, для которых $\delta_m < \delta - \zeta/2$. Тогда либо $|B^+| \geqslant \zeta^2 n/4$, либо $|B^-| \geqslant \zeta^2 n/4$. Если $|B^+| \geqslant \zeta^2 n/4$, то положим $G_1 = E_1$, $G_2 = B^+$. Ясно, что для множеств G_1, G_2 условие (48) выполнено. Проверим выполнение условия (47). Имеем $|A \cap (G_1 \times G_2)| = |G_1| \sum_{m \in G_2} \delta_m > (\delta + \zeta/2)|G_1|\,|G_2|$, следовательно, условие (47) для множеств G_1, G_2 также выполнено. Если же $|B^-| \geqslant \zeta^2 n/4$, то положим $G_1 = E_1$, $G_2 = E_2 \setminus B^-$. Рассмотрим разбиение $E_1 \times E_2$ на множества $Q_i = E_1 \times \{x\}$, $x \in E_2$. Ясно, что для любого $i \in E_2$ мощность Q_i равна $|E_1|$. Применяя лемму 10 к множеству $C = E_1 \times E_2$ и разбиению C на Q_i, получаем

$$|A \cap (G_1 \times G_2)| = \sum_{i \notin B^-} |A \cap Q_i| \geqslant \delta \sum_{i \notin B^-} |Q_i| + \frac{\zeta}{2} \sum_{i \in B^-} |Q_i|.$$

Поскольку $|B^-| \geqslant \zeta^2 n/4$, то

$$|A \cap (G_1 \times G_2)| \geqslant \delta |G_1|\,|G_2| + \frac{\zeta^3}{8}\, n|E_1| \geqslant \left(\delta + \frac{\zeta^3}{8}\right)|G_1|\,|G_2|. \tag{49}$$

Следовательно, для множеств G_1 и G_2 неравенство (47) выполнено. Легко видеть, что неравенство (48) для этих множеств также выполнено. Действительно, из неравенства (49) вытекает, что

$$|G_1|\,|G_2| \geqslant |A \cap (G_1 \times G_2)| \geqslant \frac{\zeta^3}{8}\, n|E_1|.$$

Значит, $|G_2| \geqslant n\zeta^3/8$. В случае, когда не выполнено неравенство (31), доказательство аналогично. Лемма доказана.

Пусть $\vec{u}_1$ – неотрицательный собственный вектор, соответствующий первому собственному значению μ_1 матрицы T, а $\vec{u}_2$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению μ_2. Вектор $\vec{u}_1$ существует по теореме 8. Будем считать, что $(\vec{u}_1, \vec{u}_1) = (\vec{u}_2, \vec{u}_2) = n$ и $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0$. Положим $\vec{u} = (1, \ldots, 1)$.

Предложение 2. *Пусть множество $A \subseteq E_1 \times E_2$, $|E_1| = |E_2| = n$, имеет мощность $|A| = \delta n^2$. Пусть $0 < \alpha \leqslant \delta$ – действительное число, и A не α-равномерно относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Если $\|\vec{u} - \vec{u}_1\|^2 \leqslant 2^{-12}\alpha^2 \cdot n$, то существуют множества $G_1 \subseteq E_1$ и $G_2 \subseteq E_2$, для которых выполнено*

$$|A \cap (G_1 \times G_2)| > \left(\delta + 2^{-200}\alpha^{60}\right)|G_1|\,|G_2|, \qquad |G_1|, |G_2| > 2^{-200}\alpha^{60} n. \tag{50}$$

Если же $\|\vec{u} - \vec{u}_1\|^2 > 2^{-12}\alpha^2 n$, то (50) выполнено без условия α-равномерности A относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Доказательство. Будем считать, что неравенства (30), (31) выполнены при $\alpha_1 = 2^{-56}\alpha^{20}$. Если это не так, то множества G_1, G_2, удовлетворяющие (50), найдутся по лемме 11.

Случай 1. Пусть $\|\vec{u} - \vec{u}_1\|^2 \leqslant 2^{-12}\alpha^2 n$. Поскольку A не α-равномерно, то по лемме 8 имеем $\mu_2 \geqslant \alpha n^2/2$. Пусть $\mathcal{E}$ – $(n \times n)$-матрица, состоящая из одних единиц, $M_1 = M - \delta\mathcal{E}$, $T_1 = M_1 M_1^T$. Тогда

$$\left(M^T\vec{u}_2, M^T\vec{u}_2\right) = \left(M_1^T\vec{u}_2, M_1^T\vec{u}_2\right) + \left(M_1^T\vec{u}_2, \delta\mathcal{E}\vec{u}_2\right) + (\delta\mathcal{E}\vec{u}_2, M_1^T\vec{u}_2) + (\delta\mathcal{E}\vec{u}_2, \delta\mathcal{E}\vec{u}_2). \tag{51}$$

Оценим второе слагаемое в (51). Так как $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0$, то $(\vec{u}, \vec{u}_2) = (\vec{u} - \vec{u}_1, \vec{u}_2)$. Применяя неравенство Коши–Буняковского и оценку $\|\vec{u} - \vec{u}_1\|^2 \leqslant 2^{-12}\alpha^2 n$, получаем

$$|(\vec{u}, \vec{u}_2)|^2 \leqslant \|\vec{u} - \vec{u}_1\|^2 n \leqslant 2^{-12}\alpha^2 n^2. \tag{52}$$

Имеем $\mathcal{E}\vec{u}_2 = \vec{u}(\vec{u}, \vec{u}_2)$. Применяя лемму 6, неравенство Коши–Буняковского и оценку (52), находим

$$\begin{aligned}\bigl|\bigl(M_1^T\vec{u}_2, \delta\mathcal{E}\vec{u}_2\bigr)\bigr|^2 &\leqslant \bigl(M_1^T\vec{u}_2, M_1^T\vec{u}_2\bigr)\,(\mathcal{E}\vec{u}_2, \mathcal{E}\vec{u}_2)\\ &\leqslant n^3\bigl(\vec{u}(\vec{u}, \vec{u}_2), \vec{u}(\vec{u}, \vec{u}_2)\bigr) \leqslant 2^{-12}\alpha^2 n^6.\end{aligned} \tag{53}$$

Отсюда $\bigl|\bigl(M_1^T\vec{u}_2, \delta\mathcal{E}\vec{u}_2\bigr)\bigr| \leqslant 2^{-6}\alpha n^3$. Аналогично, $|(\delta\mathcal{E}\vec{u}_2, M_1^T\vec{u}_2)| \leqslant 2^{-6}\alpha n^3$ и $|(\delta\mathcal{E}\vec{u}_2, \delta\mathcal{E}\vec{u}_2)| \leqslant 2^{-6}\alpha n^3$. Тогда

$$\frac{\alpha}{2}\,n^3 \leqslant \mu_2 n = (T\vec{u}_2, \vec{u}_2) = \bigl(M^T\vec{u}_2, M^T\vec{u}_2\bigr) \leqslant \bigl(M_1^T\vec{u}_2, M_1^T\vec{u}_2\bigr) + \frac{\alpha}{4}\,n^3. \tag{54}$$

Окончательно получаем

$$\bigl(M_1^T\vec{u}_2, M_1^T\vec{u}_2\bigr) \geqslant \frac{\alpha}{4}\,n^3. \tag{55}$$

Обозначим через a_{ij} элементы матрицы M_1^T, а через x_i элементы вектора $\vec{u}_2$. По неравенству Коши–Буняковского для любого $i = 1, \ldots, n$ выполнено $\bigl|\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k\bigr| \leqslant n$. Используя (55), получаем

$$\frac{\alpha}{4}\,n^3 \leqslant \sum_{i=1}^n \Bigl|\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k\Bigr|^2 \leqslant n\sum_{i=1}^n \Bigl|\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k\Bigr|. \tag{56}$$

Легко видеть, что все элементы матрицы T ограничены по модулю числом n. Применим лемму 9 к матрице T и ее собственному вектору $\vec{u}_2$ с параметрами $D = n$ и $\xi = \alpha/16$. По этой лемме существуют множества $F_1, \ldots, F_m$, $m \leqslant 2^{16}\alpha^{-4}$, и комплексные числа $c_1, \ldots, c_m$, для которых выполнены условия 1)–3). Используя (56) и неравенство треугольника, получаем

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \Bigl|\sum_{k\in F_j} a_{ik}x_k\Bigr| \geqslant \frac{\alpha}{4}\,n^2. \tag{57}$$

Введем множество индексов

$$B = \bigl\{j\colon |F_j| < 2^{-28}\alpha^{10}n\bigr\}. \tag{58}$$

Из утверждений 2) и 3) леммы 9 вытекает, что $|x_k| \leqslant 4/\alpha$. Отсюда имеем

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j\in B} \Bigl|\sum_{k\in F_j} a_{ik}x_k\Bigr| < nm2^{-28}\alpha^{10}n\cdot 4\alpha^{-1} \leqslant \frac{\alpha}{8}\,n^2. \tag{59}$$

Значит,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j\notin B} \Bigl|\sum_{k\in F_j} a_{ik}x_k\Bigr| \geqslant \frac{\alpha}{8}\,n^2. \tag{60}$$

Используя свойства 2), 3) чисел c_j и множеств F_j из леммы 9, получаем

$$\frac{\alpha}{16}\,n^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\notin B}\Big|\sum_{k\in F_j} a_{ik}c_j\Big| \leqslant \frac{2}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\notin B}\Big|\sum_{k\in F_j} a_{ik}\Big|. \tag{61}$$

Рассмотрим множества

$$J_j^+ = \Big\{i\colon j\notin B,\ \sum_{k\in F_j} a_{ik}\geqslant 0\Big\} \quad\text{и}\quad J_j^- = \Big\{i\colon j\notin B,\ \sum_{k\in F_j} a_{ik}< 0\Big\}. \tag{62}$$

Обозначим через C множество тех k, для которых $|\gamma_k-\delta|>\sqrt{\alpha_1}$. Из неравенства (31) вытекает, что $|C|\leqslant\alpha_1 n$. Обозначим через $\overline{C}$ дополнение до C в $\{1,\dots,n\}$. Заметим, что для всех $j\notin B$ выполняется двойное неравенство $|C|\leqslant\alpha_1 n\leqslant\sqrt{\alpha_1}\,|F_j|$. Имеем

$$\Big|\sum_i\sum_{k\in F_j} a_{ik}\Big| = \Big|n\sum_{k\in F_j}(\gamma_k-\delta)\Big| = n\Big|\sum_{k\in F_j\cap C}(\gamma_k-\delta)+\sum_{k\in F_j\cap\overline{C}}(\gamma_k-\delta)\Big|$$
$$\leqslant |C|n+\sqrt{\alpha_1}\,|F_j|n\leqslant 2\sqrt{\alpha_1}\,|F_j|n\leqslant\frac{\alpha^2}{64}\,|F_j|n.$$

Отсюда получаем

$$\Big|\sum_{i\in J_j^+}\sum_{k\in F_j} a_{ik}+\sum_{i\in J_j^-}\sum_{k\in F_j} a_{ik}\Big| = \Big|\sum_i\sum_{k\in F_j} a_{ik}\Big|\leqslant\frac{\alpha^2}{64}\,|F_j|n.$$

Значит, $\big|\sum_{i\in J_j^-}\sum_{k\in F_j} a_{ik}\big|\leqslant\sum_{i\in J_j^+}\sum_{k\in F_j} a_{ik}+\alpha^2|F_j|n/64$. Используя (61), имеем

$$\frac{\alpha^2}{128}\,n^2\leqslant\sum_{j\notin B}\sum_{i\in J_j^+}\sum_{k\in F_j} a_{ik}. \tag{63}$$

Выберем точку $j_0\notin B$, для которой сумма $\sum_{i\in J_j^+}\sum_{k\in F_j} a_{ik}$ максимальна. Тогда

$$\sum_{i\in J_{j_0}^+}\sum_{k\in F_{j_0}} a_{ik}\geqslant\frac{\alpha^2}{128m}\,n^2\geqslant 2^{-18}\alpha^6 n^2. \tag{64}$$

Из (64) следует, что $|J_{j_0}^+|>2^{-18}\alpha^6 n$. Пусть $G_1=F_{j_0}$, а $G_2=J_{j_0}^+$. Поскольку $j_0\notin B$, то $|G_1|\geqslant 2^{-28}\alpha^{10}n$. Используя (64), получаем

$$|A\cap(G_1\times G_2)|>\big(\delta+2^{-18}\alpha^6\big)|G_1|\,|G_2|.$$

Мы видим, что для множеств G_1, G_2 условия (50) выполнены.

Случай 2. Пусть $\|\vec{u}-\vec{u}_1\|^2>2^{-12}\alpha^2 n$. Имеем

$$2^{-12}\alpha^2 n<\|\vec{u}-\vec{u}_1\|^2=(\vec{u},\vec{u}\,)-2(\vec{u},\vec{u}_1)+(\vec{u}_1,\vec{u}_1)=2n-2(\vec{u},\vec{u}_1).$$

Кроме того, $(\vec{u}_1,\vec{u}\,)\geqslant 0$. Отсюда

$$0\leqslant(\vec{u}_1,\vec{u}\,)\leqslant n-2^{-13}\alpha^2 n. \tag{65}$$

Имеем $\mathcal{E}^2 = n\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}\vec{u}_1 = \vec{u}(\vec{u}, \vec{u}_1)$. Тогда

$$(T_1\vec{u}_1, \vec{u}_1) = (T\vec{u}_1, \vec{u}_1) - \delta\big(\mathcal{E}M^T\vec{u}_1, \vec{u}_1\big) - \delta(M\mathcal{E}\vec{u}_1, \vec{u}_1) + \delta^2\big(\mathcal{E}^2\vec{u}_1, \vec{u}_1\big)$$
$$= (T\vec{u}_1, \vec{u}_1) - \delta\big(M^T\vec{u}_1, \mathcal{E}\vec{u}_1\big) - \delta(M\mathcal{E}\vec{u}_1, \vec{u}_1) + \delta^2 n|(\vec{u_1}, \vec{u}\,)|^2 = \sigma. \quad (66)$$

Вычислим член $\big(M^T\vec{u}_1, \mathcal{E}\vec{u}_1\big)$ в сумме (66). Имеем

$$\big(M^T\vec{u}_1, \mathcal{E}\vec{u}_1\big) = (\vec{u}, \vec{u}_1)\big(M^T\vec{u}_1, \vec{u}\,\big) = (\vec{u}, \vec{u}_1)(\vec{u}_1, M\vec{u}\,).$$

Пусть вектор $\vec{v}$ равен $\{(\delta_m - \delta)\}_{m=1}^n$. Тогда $M\vec{u} = \delta n\vec{u} + n\vec{v}$. Отсюда $(\vec{u}_1, M\vec{u}\,) = \delta n(\vec{u}, \vec{u}_1) + n(\vec{u}_1, \vec{v}\,)$. Используя неравенство Коши–Буняковского и свойство (30), получаем

$$(\vec{u}_1, \vec{v}\,)^2 \leqslant \|\vec{u}_1\|_2^2\|\vec{v}\|_2^2 = n\sum_m(\delta_m - \delta)^2 \leqslant \alpha_1^2 n^2.$$

Следовательно, $\big(M^T\vec{u}_1, \mathcal{E}\vec{u}_1\big) = \delta n(\vec{u}_1, \vec{u}\,)^2 + \theta\alpha_1 n^3$, где $|\theta| \leqslant 1$. Аналогично, $(M\mathcal{E}\vec{u}_1, \vec{u}_1) = \delta n(\vec{u}_1, \vec{u}\,)^2 + \theta_1\alpha_1 n^3$, где $|\theta_1| \leqslant 1$. Значит,

$$\sigma \geqslant (T\vec{u}_1, \vec{u}_1) - \delta^2 n(\vec{u}_1, \vec{u}\,)^2 - 2\alpha_1 n^3. \quad (67)$$

По лемме 7 $\mu_1 \geqslant \delta^2 n^2$, следовательно, $(T\vec{u}_1, \vec{u}_1) = \mu_1(\vec{u}_1, \vec{u}_1) \geqslant \delta^2 n^3$. Используя эту оценку и неравенство (65), получаем

$$(T_1\vec{u}_1, \vec{u}_1) > 2^{-13}\alpha^2\delta^2 n^3. \quad (68)$$

Неравенство (68) отличается от неравенства (55) только тем, что вместо вектора $\vec{u}_2$ в нем присутствует вектор $\vec{u}_1$. Вектор $\vec{u}_1$, как и вектор $\vec{u}_2$, является собственным вектором матрицы T. Кроме того, собственное значение μ_1, соответствующее вектору $\vec{u}_1$, больше чем собственное значение μ_2, соответствующее вектору $\vec{u}_2$. Поэтому можно применить все преобразования, которые были проведены в формулах (55)–(68), и найти множества G_1 и G_2, $G_1 \subseteq E_1$, $G_2 \subseteq E_2$, такие, что $|G_1|, |G_2| > 2^{-200}\alpha^{60}n$ и $|A \cap (G_1 \times G_2)| > (\delta + 2^{-200}\alpha^{60})|G_1|\,|G_2|$. Предложение доказано.

В предложении 2 множество $E_1 \times E_2$ представляет собой квадрат. Теперь мы докажем предложение 2 для прямоугольников.

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – некоторые подмножества $\mathbb{Z}_N^2$, причем $\mathcal{A}$ не пусто. Будем обозначать величину $|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|/|\mathcal{A}|$ через $\delta_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$.

Предложение 3. *Пусть множество $A \subseteq E_1 \times E_2$ имеет мощность $|A| = \delta|E_1|\,|E_2|$. Пусть $0 < \alpha \leqslant \delta/2$ – действительное число, A не α-равномерно относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и $\min\{|E_1|, |E_2|\} \geqslant 2^{500}\alpha^{-70}$. Тогда существуют множества $G_1 \subseteq E_1$ и $G_2 \subseteq E_2$, для которых выполнено*

$$|A \cap (G_1 \times G_2)| > \big(\delta + 2^{-1000}\alpha^{140}\big)|G_1|\,|G_2|, \quad (69)$$
$$|G_1| > 2^{-1000}\alpha^{140}|E_1|, \qquad |G_2| > 2^{-1000}\alpha^{140}|E_2|. \quad (70)$$

Доказательство. Будем считать, что неравенства (30), (31) выполнены при $\alpha_1 = \alpha/10$. Если это не так, то множества G_1, G_2, удовлетворяющие (69) и (70), найдутся по лемме 11. Для любого $K \subseteq E_1 \times E_2$ положим $g_K(\vec{s}) = (\chi_A(\vec{s}) - \delta)\,\chi_K(\vec{s})$. Пусть

$$g = g_{E_1\times E_2}, \qquad \varepsilon(\vec{s}) = (\delta - \delta_m)\,\chi_{E_1\times E_2}(\vec{s}),$$

а $f(\vec{s})$ – балансовая функция множества A. Тогда $f(\vec{s}) = g(\vec{s}) + \varepsilon(\vec{s})$. Поскольку множество A не α-равномерно относительно базиса, то $\|f\|^4 \geqslant \alpha|E_1|^2|E_2|^2$. По лемме 5 $\|f\| \leqslant \|g\| + \|\varepsilon\|$. Норма функции $\varepsilon(\vec{s})$ равна $\big(|E_1|^2 \sum_{m,l}((\delta-\delta_m)\times(\delta-\delta_l))^2\big)^{1/4}$. По неравенству (30) при $\alpha_1 = \alpha/10$ получаем $\|\varepsilon(\vec{s})\| \leqslant \alpha(|E_1|\,|E_2|)^{1/2}/10$. Отсюда $\|g\|^4 \geqslant \alpha|E_1|^2|E_2|^2/2$.

Пусть, для определенности, $|E_2| \leqslant |E_1|$.

Случай 1. Пусть $|E_1| < 2|E_2|$. Если $|E_1| \geqslant \frac{3}{2}|E_2|$, то разобьем $E_1 \times E_2$ на квадрат K и прямоугольник P так, что $|K| = |E_2|^2$, $P = P_1 \times P_2$, где $|P_2| = |E_2|$, $|P_1| = |E_1| - |E_2| \geqslant |E_2|/2$.

Пусть теперь $|E_2| \leqslant |E_1| < \frac{3}{2}|E_2|$. Если $|E_2|$ четное, то разобьем E_2 на две равные части, а E_1 на две части так, чтобы длина первой части была равна $|E_2|/2$. Тогда $E_1 \times E_2$ разбивается на два квадрата и прямоугольник. Длины сторон прямоугольника равны $|E_2|$ и $|E_1| - [|E_2|/2]$. Пусть $E_2 = \{p_1, p_2, \ldots, p_{|E_2|}\}$. Если $|E_2|$ нечетное, то разобьем E_2 на две части длиной $[|E_2|/2]$ и точку $p_{|E_2|}$. Тогда $E_1 \times E_2$ разбивается на два квадрата, прямоугольник и "прямую" $E_1 \times \{p_{|E_2|}\}$. Снова длины сторон найденного прямоугольника равны $|E_2|$ и $|E_1| - [|E_2|/2]$.

В любом случае прямоугольники $P = P_1 \times P_2$, получающиеся при таком разбиении, обладают тем свойством, что $|P_1| \leqslant |P_2| \leqslant 2|P_1|$. Мы опять можем разбить любой такой прямоугольник P на части. Повторим эту процедуру k раз, $k = [\log_2(2^{16}/\alpha^2)] > 1$. Мы получим не более $2k$ квадратов K_i, не более k "прямых" и один прямоугольник. Обозначим этот прямоугольник через C, а объединение всех "прямых" через L. Количество точек в C не превосходит $(3/4)^k|E_1|\,|E_2|$. Отсюда имеем

$$\|g_C\| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{k/2} |E_1|^{1/2}|E_2|^{1/2} < \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{16}\right)^{1/4} |E_1|^{1/2}|E_2|^{1/2}.$$

Применяя неравенство $\min\{|E_1|, |E_2|\} \geqslant 2^{500}\alpha^{-70}$, получаем

$$\|g_L\| \leqslant 2k|E_1|^{1/2} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{16}\right)^{1/4} |E_1|^{1/2}|E_2|^{1/2}.$$

Имеем $\|g_{E_1\times E_2}\| \geqslant (\alpha/16)^{1/4}|E_1|^{1/2}|E_2|^{1/2}$ и $g_{E_1\times E_2} = \sum_i g_{K_i} + g_C + g_L$. По лемме 5 существует такое i_1, что $\|g_{K_{i_1}}\| \geqslant (\alpha/16)^{1/4}|E_1|^{1/2}|E_2|^{1/2}/(4k)$. Пусть $F = K_{i_1}$ и $\overline{F} = \bigcup_{i\neq i_1} K_i \cup C$. Мы начали нашу процедуру с прямоугольника $E_1 \times E_2$, причем $|E_2| = \min\{|E_1|, |E_2|\}$. Затем мы получили новый прямоугольник, длины сторон которого не меньше чем $|E_2|/2$. Легко убедиться в том, что на k-м шаге процедуры мы получим прямоугольник, длины сторон которого не меньше чем $|E_2|/2^{k+1}$. Следовательно, на k–ом шаге длины сторон всех квадратов будут не меньше чем $[|E_2|/2^{k+2}] \geqslant |E_2|/2^{k+3}$. Отсюда

$$|F| \geqslant 2^{-39}\alpha^4|E_1|\,|E_2| \geqslant 2^{-39}\alpha^4|\overline{F}|.$$

Если $\delta_{\overline{F}}(A) > \delta + 2^{-450}\alpha^{64}$, то плотность A в одном из квадратов K_i, $i \neq i_1$, или прямоугольнике C больше чем $\delta + 2^{-450}\alpha^{64}$. Возьмем в качестве G_1, G_2 стороны этого квадрата или прямоугольника. Тогда для множеств G_1, G_2 неравенство (69) выполнено. Длины сторон всех квадратов K_i и прямоугольника C не меньше чем $2^{-(k+3)}|E_2|$. Следовательно, для G_1, G_2 неравенство (70) также выполнено.

Рассмотрим случай, когда $\delta_{\overline{F}}(A) \leqslant \delta + 2^{-450}\alpha^{64}$. Пусть $A_1 = A \cap F$, $A_2 = A \cap \overline{F}$, $A_3 = A \cap L$. Поскольку $\min\{|E_1|, |E_2|\} \geqslant 2^{500}\alpha^{-70}$, то $|A_3| \leqslant |L| \leqslant 2^{-450}\alpha^{64}(|F| + |\overline{F}|)$. Имеем

$$\delta(|F| + |\overline{F}|) \leqslant \delta|E_1|\,|E_2| = |A| = |A_1| + |A_2| + |A_3|.$$

Отсюда получаем

$$\big(\delta - 2^{-449}\alpha^{64}\big)(|F| + |\overline{F}|) \leqslant |A_1| + |A_2| \leqslant \delta_F(A)|F| + \big(\delta + 2^{-450}\alpha^{64}\big)|\overline{F}|. \quad (71)$$

Так как $|F| \geqslant 2^{-39}\alpha^4|\overline{F}|$, то из неравенства (71) получаем $\delta_F(A) \geqslant \delta - 2^{-410}\alpha^{60}$. Используя предложение 2 в случае, когда F – квадрат, находим множества G_1, G_2, для которых выполнено (69) и (70). Неравенства (69), (70) можно заменить на более сильные, а именно

$$|A \cap (G_1 \times G_2)| > \big(\delta + 2^{-490}\alpha^{68}\big)|G_1|\,|G_2|,$$
$$|G_1| > 2^{-490}\alpha^{68}|E_1|, \qquad |G_2| > 2^{-490}\alpha^{68}|E_2|.$$

Случай 2. Пусть $|E_1| \geqslant 2|E_2|$. Тогда найдется натуральное число $t \geqslant 2$ такое, что $t|E_2| \leqslant |E_1| < (t+1)|E_2|$. Пусть $d = \operatorname{diam} E_2$ и $\widetilde{E}_2 = E_2 \sqcup (E_2 + d) \sqcup \cdots \sqcup (E_2 + (t-1)d)$, $\widetilde{A} = A \sqcup (A + d\vec{e}_2) \sqcup \cdots \sqcup (A + (t-1)d\vec{e}_2)$. Тогда $\widetilde{A} \subseteq E_1 \times \widetilde{E}_2$ и $\widetilde{A} = \delta|E_1|\,|\widetilde{E}_2|$. Пусть $\tilde{g}(\vec{s}) = (\chi_{\widetilde{A}}(\vec{s}) - \delta)\,\chi_{E_1 \times \widetilde{E}_2}(\vec{s})$. Легко видеть, что $\|\tilde{g}\|^4 = t^2\|g\|^4$. Отсюда $\|\tilde{g}\|^4 \geqslant \alpha|E_1|^2|\widetilde{E}_2|^2/2$. Имеем $|\widetilde{E}_2| \leqslant |E_1| < 2|\widetilde{E}_2|$. Применяя рассуждения, использованные в случае 1, к множествам E_1, $\widetilde{E}_2$ и $\widetilde{A}$, находим множества $\widetilde{G}_1 \subseteq E_1$, $\widetilde{G}_2 \subseteq E_2$ такие, что $|\widetilde{G}_1| > 2^{-490}\alpha^{68}|E_1|$, $|\widetilde{G}_2| > 2^{-490}\alpha^{68}|E_2|$ и $|\widetilde{A} \cap (\widetilde{G}_1 \times \widetilde{G}_2)| > \big(\delta + 2^{-490}\alpha^{68}\big)|\widetilde{G}_1|\,|\widetilde{G}_2|$. Имеем $\widetilde{G}_2 = \bigsqcup_{i=1}^{t} \widetilde{G}_2^{(i)}$, где $\widetilde{G}_2^{(i)} \subseteq E_2 + (i-1)d$. Пусть $\zeta = 2^{-490}\alpha^{68}$. Обозначим через B множество тех i, для которых $|\widetilde{G}_2^{(i)}| \leqslant \zeta^2|E_2|/2$. Тогда

$$\Big|\bigsqcup_{i \in B} \big(\widetilde{A} \cap \big(\widetilde{G}_1 \times \widetilde{G}_2^{(i)}\big)\big)\Big| \leqslant \frac{\zeta^2}{2}\,|\widetilde{G}_1|\,|E_2|\,|B| \leqslant \frac{\zeta^2}{2}\,|\widetilde{G}_1|\,|\widetilde{E}_2| < \frac{\zeta}{2}\,|\widetilde{G}_1|\,|\widetilde{G}_2|. \quad (72)$$

Отсюда имеем

$$\Big|\bigsqcup_{i \notin B} \big(\widetilde{A} \cap \big(\widetilde{G}_1 \times \widetilde{G}_2^{(i)}\big)\big)\Big| \geqslant \big(\delta + 2^{-491}\alpha^{68}\big)|\widetilde{G}_1|\,|\widetilde{G}_2|. \quad (73)$$

Из неравенства (73) вытекает, что найдется индекс $i_0 \notin B$, для которого

$$\big|\widetilde{A} \cap \big(\widetilde{G}_1 \times \widetilde{G}_2^{(i_0)}\big)\big| \geqslant \big(\delta + 2^{-491}\alpha^{68}\big)|\widetilde{G}_1|\,|\widetilde{G}_2^{(i_0)}|. \quad (74)$$

Поскольку $\widetilde{G}_2^{(i_0)} \subseteq E_2 + (i_0 - 1)d$, то $\widetilde{G}_2^{(i_0)} = G_2' + (i_0 - 1)d$, где $G_2' \subseteq E_2$. Положим $G_1 = \widetilde{G}_1$, $G_2 = G_2'$. Имеем $|G_1| > 2^{-490}\alpha^{68}|E_1|$. Так как $i_0 \notin B$,

то $|G_2| = |\widetilde{G}_2^{(i_0)}| > \zeta^2|E_2|/2$. Следовательно, для множеств G_1, G_2 неравенство (69) выполнено. Имеем $\bigl|\widetilde{A} \cap \bigl(\widetilde{G}_1 \times \widetilde{G}_2^{(i_0)}\bigr)\bigr| = |A \cap (G_1 \times G_2)|$. Отсюда и из неравенства (74) вытекает, что для множеств G_1, G_2 неравенство (70) также выполнено. Предложение доказано.

§ 4. Доказательство теоремы 4

Для доказательства теоремы 4 нам понадобятся несколько утверждений.

Будем говорить, что двумерная арифметическая прогрессия P есть *правильный квадрат*, если $P = P_1 \times P_2$, где P_1, P_2 – одномерные прогрессии с одинаковыми разностями и мощностями.

Пусть $P = \{a, a+d, \dots, a+(t-1)d\} \times \{b, b+d, \dots, b+(t-1)d\}$ – правильный квадрат и E – произвольное множество. Правильный квадрат P изоморфен квадрату $\{1, \dots, t\}^2$. Изоморфизм φ задается формулой $\varphi(a+kd, b+ld) = (k, l)$, где $k, l = 1, \dots, t$. Мы будем говорить, что E *является α-равномерным в правильном квадрате P*, если множество $\varphi(E \cap P)$ α-равномерно в правильном квадрате $\{1, \dots, t\}^2$. Другими словами, E является α-равномерным в правильном квадрате P, если для балансовой функции f множества $\varphi(E \cap P)$ справедливо неравенство (14).

Одномерный вариант следующей теоремы фактически содержится в работе [6] (см. также [14]).

Напомним, что для множеств $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{Z}_N^2$, $\mathcal{A} \neq \varnothing$, величина $\delta_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ означает $|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|/|\mathcal{A}|$.

Теорема 9. *Пусть $0 < \varepsilon \leqslant \delta$ – некоторые числа и $\alpha(s) = Ks^{\rho}$, $K \in (0, 1]$, $\rho \geqslant 4$. Пусть множество W содержится в $\{1, \dots, N\}^2$, $|W| = \delta N^2$, и $N \geqslant (C\alpha^{c_1})^{-(1/c_2)^{1/\alpha}}$, где $C = 2^{1000\rho}$, $c_1 = 100\rho$ и $c_2 = 2^{-128}$, а $\alpha = \alpha(\varepsilon)$. Тогда существуют правильные квадраты $P_1, \dots, P_M \subseteq \{1, \dots, N\}^2$ и разбиение W на множества $W \cap P_1, \dots, W \cap P_M$ и B, для которых выполнено*:

1) *для любого i множество W является $\alpha(\delta_{P_i}(W))$-равномерным в прогрессии P_i*;

2) *для любого i выполнено $|W \cap P_i| \geqslant \varepsilon|P_i|$ и $|P_i| \geqslant N^{c_2^{1/\alpha}}$*;

3) $|B| < 4\varepsilon N^2$.

Доказательство. Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 12. *Пусть s и N – натуральные числа, $2^{12}N^{1/2} \leqslant s \leqslant N$, а $\phi\colon \mathbb{Z}_N^2 \to \mathbb{Z}_N$ – некоторая функция вида $\phi(x, y) = r_1x + r_2y$, $(r_1, r_2) \neq \vec{0}$. Тогда $\mathbb{Z}_N$ может быть разбито на арифметические прогрессии $P_1, \dots, P_M$, $M \leqslant 8N^{4/3}/s^{2/3}$ с одинаковой разностью, длины которых отличаются друг от друга не более чем на 1, так что для любых $i, j \in \{1, \dots, M\}$ диаметр $\phi(P_i \times P_j)$ не превосходит s.*

Замечание 2. Длины прогрессий $P_1, \dots, P_M$ в лемме 12 не меньше чем $[N/M]$. Поскольку $s \geqslant 2^{12}N^{1/2}$, то $[N/M] \geqslant s^{2/3}/(16N^{1/3})$.

Доказательство. Пусть $t = \lceil (N^2/s)^{1/3}/2 \rceil$. Рассмотрим $t^2 + 1$ вектор $\vec{0}, (r_1, r_2), 2(r_1, r_2), \dots, t^2(r_1, r_2) \in \mathbb{Z}_N^2$. Разобьем $\{1, \dots, N\}^2$ на t^2 квадратов

со стороной N/t. По принципу Дирихле в один из квадратов попадут два вектора. Предположим, что в этот квадрат попали векторы $t_1(r_1, r_2)$ и $t_2(r_1, r_2)$, и пусть $t_2 > t_1$. Положим $u = t_2 - t_1$. Тогда $0 < u \leqslant t^2$ и $|ur_1|, |ur_2| \leqslant N/t$. Разобьем $\{1, \dots, N\}$ на классы вычетов по модулю u. Любой класс по модулю u имеет мощность между $[N/u]$ и $\lceil N/u \rceil$. Пусть P и Q – множества, состоящие из $[st/(2N)]$ последовательных элементов некоторых классов вычетов по модулю u. Тогда диаметр $\phi(P \times Q)$ не превосходит

$$|ur_1|\,|P| + |ur_2|\,|Q| \leqslant \frac{N}{t}\,\frac{st}{2N} + \frac{N}{t}\,\frac{st}{2N} = s. \tag{75}$$

Имеем $[st/(2N)] \leqslant N/(3t^2) \leqslant (1/2)[N/u]$. Каждый класс вычетов может быть разбит не более чем на $4N^2/(ust)$ арифметических прогрессий, длины которых не превосходят $st/(2N)$ и отличаются друг от друга не более чем на 1. Докажем это.

Рассмотрим класс вычетов по модулю u минимальной длины. Обозначим этот класс через $\mathbf{U}$, а его длину через S. Пусть число k представляет собой результат деления S на $\lceil st/(4N) \rceil$ с остатком. Обозначим остаток деления через q. Разделив с остатком q на k, получим l и остаток d, $d < k$. Поскольку $[st/(2N)] \leqslant (1/2)[N/u]$, то $k \geqslant 2$ и, следовательно, $l \leqslant q/2 < \lceil st/(4N) \rceil/2$. Разобьем $\mathbf{U}$ на d прогрессий длины $\lceil st/(4N) \rceil + l + 1$ и на $k - d$ прогрессий длины $\lceil st/(4N) \rceil + l$. Так как $(\lceil st/(4N) \rceil + l + 1)d + (\lceil st/(4N) \rceil + l)(k - d) = S$, то произвольный элемент $\mathbf{U}$ попадет в некоторую прогрессию, кроме того, длина произвольной прогрессии нашего разбиения не превосходит $\lceil st/(4N) \rceil + l + 1 \leqslant [st/(2N)] - 1$.

Все $\mathbb{Z}_N$ можно разбить на арифметические прогрессии, длины которых не превосходят $[st/(2N)]$ и отличаются не более чем на 1. Действительно, мощности классов вычетов отличаются друг от друга не более чем на 1, следовательно, длина максимального класса вычетов по модулю u не превосходит $S + 1$. Разобьем все классы вычетов длиной S так же, как и класс $\mathbf{U}$. Если классов вычетов длиной $S + 1$ нет, то мы получим требуемое нам разбиение для всего $\mathbb{Z}_N$.

Рассмотрим произвольный класс вычетов $\mathbf{V}$ длиной $S+1$. Обозначим через x элемент $\mathbf{V}$, у которого $|x|$ наибольший. Разобьем $\mathbf{V} \setminus \{x\}$ точно таким же образом, как и класс $\mathbf{U}$. Если длины прогрессий, на которые разбивается $\mathbf{V}$, равны, то, добавив x к последней прогрессии, мы получим необходимое нам разбиение. Если же длины прогрессий не равны, то, добавляя x к последней прогрессии, мы получим необходимое нам разбиение. Количество прогрессий при таком разбиении не превосходит $8N^{4/3}/s^{2/3}$. Кроме того, для любых $i, j \in \{1, \dots, M\}$ диаметр $\phi(P_i \times P_j)$ не превосходит s. Лемма доказана.

Лемма 13. *Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и $N \geqslant 2^{100}/\alpha^{10}$. Пусть множество A лежит в $\mathbb{Z}_N^2$, $|A| = \delta N^2$, и для некоторого $\vec{r} \neq \vec{0}$ выполнено $|\widehat{\chi}_A(\vec{r})| \geqslant \alpha N^2$. Тогда существуют такое разбиение $\mathbb{Z}_N^2$ на правильные квадраты равной мощности $S_1, \dots, S_r$ и множество Ω, для которых выполнено $|S_i| \geqslant N^{1/2}$, $i = 1, \dots, r$, $|\Omega| < N^{11/6}$ и $(1/r)\sum_{j=1}^{r} |\delta_{S_j}(A) - \delta|^2 \geqslant \alpha^2/16$.*

Доказательство. Пусть $\vec{r} = (r_1, r_2)$ и $s = [\alpha N/(4\pi)]$. Так как $N \geqslant 2^{100}/\alpha^{10}$, то $s \neq 0$. Применим лемму 12 с параметрами s и N к функции $\phi(x, y) = r_1 x + r_2 y$. По этой лемме существует разбиение $\mathbb{Z}_N$ на арифметиче-

ские прогрессии с одинаковой разностью $P_1, \dots, P_M$, $M \leqslant 8N^{4/3}/s^{2/3}$, длины которых отличаются друг от друга не более чем на 1, так что для любых $i, j \in \{1, \dots, M\}$ диаметр $\phi(P_i \times P_j)$ не превосходит s.

Пусть $\vec{s} = k\vec{e}_1 + m\vec{e}_2$ и $f(\vec{s}) = \chi_A(\vec{s}) - \delta$. Поскольку $\vec{r} \neq \vec{0}$, то $\hat{f}(\vec{r}) = \widehat{\chi}_A(\vec{r})$. Имеем

$$\Big|\sum_{k,m} f(k,m)\, e(-(r_1 k + r_2 m))\Big| \geqslant \alpha N^2. \tag{76}$$

Рассмотрим разбиение $\mathbb{Z}_N^2$ на M^2 множеств вида $P_{ij} = P_i \times P_j$. По неравенству треугольника имеем

$$\sum_{i,j=1}^{M} \Big| \sum_{(k,m)\in P_{ij}} f(k,m)\, e(-(r_1 k + r_2 m))\Big| \geqslant \alpha N^2. \tag{77}$$

Пусть i, j – произвольные числа от 1 до M и w_{ij} – некоторый элемент P_{ij}. По лемме 12 диаметр $\phi(P_{ij})$ не больше $\alpha N/(4\pi)$. Следовательно, для любого $w \in P_{ij}$ имеем $|e(-(\phi(w))) - e(-(\phi(w_{ij})))| \leqslant \alpha/2$. Из неравенства (77) получаем

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{M} \Big| \sum_{(k,m)\in P_{ij}} f(k,m)\Big| &= \sum_{i,j=1}^{M} \Big| \sum_{(k,m)\in P_{ij}} f(k,m)\, e(-\phi(w_{ij}))\Big| \\
&\geqslant \sum_{i,j=1}^{M} \Big| \sum_{(k,m)\in P_{ij}} f(k,m)\, e(-\phi(k,m))\Big| \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^{M} \Big| \sum_{(k,m)\in P_{ij}} f(k,m)(e(-\phi(k,m)) - e(-\phi(w_{ij})))\Big| \\
&\geqslant \alpha N^2 - \sum_{i,j=1}^{M} \frac{\alpha}{2}\,|P_{ij}| = \frac{\alpha N^2}{2}\,.
\end{aligned} \tag{78}$$

Возьмем произвольное множество P_{ij} и найдем правильный квадрат $S \subseteq P_{ij}$, $|S| \geqslant N^{1/2}$. Длины P_i и P_j отличаются не более чем на 1. Если $|P_i| = |P_j|$, то положим $S = P_{ij}$. Так как $|P_i|, |P_j| \geqslant \alpha^{2/3}/(16(4\pi)^{2/3})N^{1/3}$, то $|S| \geqslant \alpha^{4/3}/(2^8(4\pi)^{4/3})N^{2/3}$. По условию $N \geqslant 2^{100}/\alpha^{10}$, отсюда $|S| \geqslant N^{1/2}$. Пусть длины P_i и P_j не равны. Пусть, для определенности, $|P_i| = |P_j| + 1$. Исключив одну из крайних точек в P_i, получим прогрессию Q. Пусть мы исключили точку $x \in P_i$. Положим $S = Q \times P_j$ и $\Omega_{ij} = A \cap (\{x\} \times P_j)$. Тогда $|S| \geqslant N^{1/2}$ и $|\Omega_{ij}| \leqslant |P_j|$.

Применив эту операцию для произвольного множества P_{ij}, мы получим семейство Λ правильных квадратов $S_1, \dots, S_r$, $r = M^2$, равной мощности. Пусть Ω – объединение всех Ω_{ij}, $i, j = 1, \dots, M$. Тогда $|\Omega| \leqslant 2M^2 N/M < N^{11/6}$. Пользуясь этой оценкой и неравенством (78), получаем

$$\sum_{S\in\Lambda} \Big| \sum_{(k,m)\in S} f(k,m)\Big| \geqslant \frac{\alpha N^2}{4}\,. \tag{79}$$

Пусть $\delta_j = \delta_{S_j}(A)$. Обозначим количество элементов в произвольном квадрате семейства Λ через t. Из неравенства (79) находим

$$\sum_{j=1}^{r} |\delta_j - \delta| \geqslant \frac{\alpha N^2}{4t} \geqslant \frac{\alpha r}{4}\,. \tag{80}$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\sum_{j=1}^{r} |\delta_j - \delta|^2 \geqslant \frac{\alpha^2 r}{16}\,. \tag{81}$$

Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Сопоставим каждому набору Σ непересекающихся множеств $C_1, \ldots, C_m,\ C_i \subseteq \mathbb{Z}_N^2,\ i = 1, \ldots, m$, функцию

$$E(\Sigma)(\vec{x}\,) = \sum_{j=1}^{m} \delta_{C_j}(W)\, \chi_{C_j}(\vec{x}\,).$$

Ясно, что для любого набора множеств Σ выполнено $|E(\Sigma)(\vec{x}\,)| \leqslant 1$. Отсюда

$$\|E(\Sigma)(\vec{x}\,)\|_2^2 = \sum_{\vec{x}} E(\Sigma)(\vec{x}\,)^2 \leqslant N^2.$$

Доказательство теоремы представляет собой индуктивный процесс. На i-м индуктивном шаге этого процесса мы построим семейство $\Sigma^{(i)}$ непересекающихся правильных квадратов $C_1, \ldots, C_{\nu_i}$ и множество $\Omega^{(i)} \supseteq \Omega^{(i-1)}$. При этом

$$|C_i| \geqslant N^{(1/4)^i}, \tag{82}$$

$$\|E(\Sigma^i)\|_2^2 \geqslant \|E(\Sigma^{i-1})\|_2^2 + 2^{-6}\alpha(\varepsilon)N^2, \tag{83}$$

$$|\Omega^{(i)} \setminus \Omega^{(i-1)}| < 2^{-6}\alpha(\varepsilon)\varepsilon N^2. \tag{84}$$

Проведем первый шаг индукции. Положим $\Sigma^{(1)} = \{\mathbb{Z}_N^2\}$ и $\Omega^{(1)} = \varnothing$. Неравенства (82)–(84) для $\Sigma^{(1)}$ и $\Omega^{(1)}$ выполнены. Пусть $E_1(\vec{x}\,) = E(\Sigma^{(1)})(\vec{x}\,)$. Тогда $E_1(\vec{x}\,) = \delta$ и $\|E_1\|_2^2 = \delta^2 N^2$.

Проведем второй шаг индукции. Если множество $W \subseteq \{1, \ldots, N\}^2$ является $\alpha(\delta)$-равномерным, то доказывать нечего и наш процесс заканчивается. Пусть W не $\alpha(\delta)$-равномерно. Пусть $f(\vec{s}\,) = \chi_W(\vec{s}\,) - \delta$. По лемме $1'$ существует ненулевой вектор $\vec{r}$, для которого $|\hat{f}(\vec{r}\,)| \geqslant \alpha(\delta)^{1/2}N^2$. Поскольку $N \geqslant (C\alpha^{c_1})^{-(1/c_2)^{1/\alpha}}$, то $N \geqslant 2^{100}/\alpha(\delta)^5$. По лемме 13 существуют такое разбиение $\mathbb{Z}_N^2$ на правильные квадраты равной мощности $S_1, \ldots, S_r$ и множество Ω, для которых выполнено $|S_i| \geqslant N^{1/2},\ i = 1, \ldots, r,\ |\Omega| < N^{11/6}$ и

$$\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} |\delta_{S_j}(W) - \delta|^2 \geqslant \frac{\alpha(\delta)}{16}\,. \tag{85}$$

Положим $\Sigma^{(2)} = \{S_1, \ldots, S_r\}$ и $\Omega^{(2)} = \Omega$. Так как $N \geqslant (C\alpha^{c_1})^{-(1/c_2)^{1/\alpha}}$, то $\Omega^{(2)} < 2^{-6}\alpha(\varepsilon)\varepsilon N^2$. Пусть f и g – произвольные функции из $\mathbb{Z}_N^2$ в $\mathbb{R}$. Обозначим через (f, g) скалярное произведение функций f и g, $(f, g) = \sum_{\vec{x}} f(\vec{x}\,)g(\vec{x}\,)$. Пусть $E_2(\vec{x}\,) = E(\Sigma^{(2)})(\vec{x}\,)$. Тогда

$$\|E_2\|_2^2 = (E_2, E_2) = (E_1, E_1) + \|E_2 - E_1\|_2^2 + 2(E_1, E_2 - E_1). \tag{86}$$

Оценим третий член в (86). Имеем

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{\vec{x}\in S_i} E_2(\vec{x}\,) = \Big|W \cap \Big(\bigsqcup_{i=1}^{r} S_i\Big)\Big| = \delta N^2 - |\Omega|.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}|(E_1, E_2 - E_1)| &= \Big|\sum_{\vec{x}} \delta(E_2(\vec{x}\,) - \delta)\Big| = \Big|\delta \sum_{\vec{x}} E_2(\vec{x}\,) - \delta^2 N^2\Big| \\ &= \Big|\delta \sum_{i=1}^{r}\sum_{\vec{x}\in S_i} E_2(\vec{x}\,) - \delta^2 N^2\Big| = \delta|\Omega| \leqslant N^{11/6}. \qquad (87)\end{aligned}$$

Найдем теперь второй член (86). Множества $S_1, \ldots, S_r$, Ω представляют собой разбиение $\mathbb{Z}_N^2$. Так как $|\Omega| \leqslant N^{11/6}$, то для любого $t = 1, \ldots, r$ имеем $|S_t| \geqslant N^2/(2r)$. Из неравенства (85) получаем

$$\begin{aligned}\|E_2 - E_1\|_2^2 &= \sum_{\vec{x}} |E_2(\vec{x}\,) - \delta|^2 \geqslant \sum_{t=1}^{r}\sum_{\vec{x}\in S_i} |E_2(\vec{x}\,) - \delta|^2 = \sum_{t=1}^{r} |S_i|\,|\delta_i - \delta|^2 \\ &\geqslant \frac{N^2}{2}\,\frac{1}{r}\sum_{t=1}^{r} |\delta_i - \delta|^2 \geqslant 2^{-5}\alpha(\delta)N^2. \qquad (88)\end{aligned}$$

Используя соотношения (87), (88) и оценку $N \geqslant (C\alpha^{c_1})^{-(1/c_2)^{1/\alpha}}$, находим

$$\|E_2\|_2^2 \geqslant \|E_1\|_2^2 + 2^{-6}\alpha(\delta)N^2 \geqslant \|E_1\|_2^2 + 2^{-6}\alpha(\varepsilon)N^2. \qquad (89)$$

Неравенства (82)–(84) для $\Sigma^{(2)}$ и $\Omega^{(2)}$ выполнены.

Пусть мы проделали i шагов итерационной процедуры $i \leqslant 2^6/\alpha(\varepsilon)$. Пусть на i-м шаге мы построили семейство $\Sigma^{(i)}$ непересекающихся правильных квадратов $C_1, \ldots, C_{\nu_i}$ и множество $\Omega^{(i)} \supseteq \Omega^{(i-1)}$, для которых выполнены неравенства (82)–(84). Из неравенства (84) вытекает, что $|\Omega^{(i)}| < \varepsilon N^2$. Пусть $\delta_j = \delta_{C_j}(W)$. Обозначим через H множество тех правильных квадратов C_j семейства $\Sigma^{(i)}$, для которых $|C_j| < 2^{200}\alpha(\delta_j)^{-10}$, и пусть $\widetilde{H}$ – объединение всех квадратов из H. Разобьем оставшиеся множества семейства $\Sigma^{(i)}$ на два класса U_1 и U_2. Пусть U_1 состоит из квадратов $C_j \in \Sigma^{(i)}$, в которых W является $\delta_{C_j}(W)$-равномерным, а U_2 – из квадратов, в которых W не является $\delta_{C_j}(W)$-равномерным.

Если $\big|W \cap \bigsqcup_{C_j\in U_2} C_j\big| < \varepsilon N^2$, то теорема доказана. Действительно, возьмем в качестве искомых квадратов $P_1, \ldots, P_M$ квадраты семейства $\Sigma^{(i)}$, принадлежащие U_1, плотность W в которых не меньше ε. Для этих квадратов выполнены условия 1), 2) теоремы. Обозначим через V оставшиеся в $U_1 \sqcup U_2$ квадраты. Легко видеть, что мощность $V \cap W$ не больше $2\varepsilon N^2$.

Оценим мощность множества $\widetilde{H} \cap W$. Пусть C_j – произвольный квадрат из H. Тогда $|C_j| < 2^{200}\alpha(\delta_j)^{-10}$. С другой стороны, из (82) имеем $|C_j| \geqslant N^{(1/4)^i} \geqslant N^{(c_2)^{1/\alpha}}$. Отсюда $\delta_j < 2^{20}/K \cdot N^{-(1/10\rho)c_2^{1/\alpha}}$. Поскольку $\sum_{S_j\in H} |S_j| \leqslant N^2$, то

$$|\widetilde{H} \cap W| = \sum_{S_j\in H} \delta_j|S_j| < \frac{2^{20}}{K}\cdot N^2 N^{-(1/10\rho)c_2^{1/\alpha}}.$$

Из условия $N \geqslant (C\alpha^{c_1})^{-(1/c_2)^{1/\alpha}}$ вытекает $|\widetilde{H} \cap W| < 2^{-7}\varepsilon\alpha(\varepsilon)N^2 < \varepsilon N^2/2$. Положим $B = (V \cap W) \sqcup (\widetilde{H} \cap W) \sqcup \Omega^{(i)}$. Тогда $|B| < 4\varepsilon N^2$ и условие 3) теоремы выполнено.

Пусть теперь $\left|W \cap \bigsqcup_{C_j \in U_2} C_j\right| \geqslant \varepsilon N^2$. Будем считать, что в U_2 попали квадраты $C_1, \ldots, C_l$. Этого можно добиться после надлежащей перенумеровки квадратов семейства $\Sigma^{(i)}$. Из условия (82) вытекает, что $l \leqslant N^2 N^{-(c_2)^{1/\alpha}}$. Возьмем произвольный правильный квадрат C_j из U_2. Пусть $f_j(\vec{s}) = \chi_{W \cap C_j}(\vec{s}) - \delta_j$. По лемме $1'$ существует ненулевой вектор $\vec{p}_j$, для которого $|\hat{f}_j(\vec{p}_j)| \geqslant \alpha(\delta_j)^{1/2}|C_j|$. Так как $C_j \notin H$, то $|C_j| \geqslant 2^{200}/\alpha(\delta_j)^{10}$. По лемме 13 существуют такое разбиение C_j на правильные квадраты равной мощности $S_1^{(j)}, \ldots, S_{r(j)}^{(j)}$ и множество Ω_j, для которых выполнено $|S_t^{(j)}| \geqslant |C_j|^{1/4}$, $t = 1, \ldots, r(j)$, $|\Omega_j| < |C_j|^{11/12}$ и

$$\frac{1}{r(j)} \sum_{t=1}^{r(j)} |\delta_{S_t^{(j)}}(W) - \delta_j|^2 \geqslant \frac{\alpha(\delta_j)}{16}\,. \tag{90}$$

Положим

$$\Sigma^{(i+1)} = \{C_1, \ldots, C_b\}_{C_j \in U_1} \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{l} \bigsqcup_{t=1}^{r(j)} S_t^{(j)} \right),$$

$$\Omega^{(i+1)} = \Omega^{(i)} \sqcup (\widetilde{H} \cap W) \bigsqcup_{j=1}^{l} |\Omega_j|.$$

Ясно, что для всех элементов семейства $\Sigma^{(i+1)}$ неравенство (82) выполнено. Поскольку квадраты $C_j \subseteq \mathbb{Z}_N^2$ не пересекаются, то $\sum_{j=1}^{l} |C_j| \leqslant N^2$. Пусть $Y = \bigsqcup_{j=1}^{l} \Omega_j$. Применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$|Y| \leqslant \sum_{j=1}^{l} |C_j|^{11/12} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{l} |C_j| \right)^{11/12} l^{1/12} \leqslant N^2 N^{-1/12(c_2)^{1/\alpha}}.$$

Так как $N \geqslant (C\alpha^{c_1})^{-(1/c_2)^{1/\alpha}}$, то $|Y| < 2^{-8}\alpha(\varepsilon)\varepsilon N^2$. Следовательно,

$$|\Omega^{(i+1)} \setminus \Omega^{(i)}| = |\widetilde{H} \cap W| + |Y| < 2^{-7}\alpha(\varepsilon)\varepsilon N^2 + 2^{-7}\alpha(\varepsilon)\varepsilon N^2 = 2^{-6}\alpha(\varepsilon)\varepsilon N^2.$$

Таким образом, для $\Omega^{(i+1)}$ неравенство (84) выполнено.

Проверим выполнение неравенства (83). Пусть $E_i(\vec{x}) = E(\Sigma^{(i)})(\vec{x})$, а $E_{i+1}(\vec{x}) = E(\Sigma^{(i+1)})(\vec{x})$. Тогда

$$\|E_{i+1}\|_2^2 = (E_{i+1}, E_{i+1}) = (E_i, E_i) + \|E_{i+1} - E_i\|_2^2 + 2(E_i, E_{i+1} - E_i). \tag{91}$$

Оценим третий член в (91). Для любого $C_j \in U_1$ выполнено $E_{i+1}(\vec{x}) = E_i(\vec{x})$. Отсюда $\sum_{\vec{x} \in C_j} (E_{i+1}(\vec{x}) - E_i(\vec{x})) = 0$. Для любого $C_j \in U_2$ имеем

$\left|\sum_{\vec{x}\in C_j}(E_{i+1}(\vec{x})-E_i(\vec{x}))\right|\leqslant|\Omega_j|$. Следовательно,

$$\begin{aligned}|(E_i,E_{i+1}-E_i)|&=\Big|\sum_{\vec{x}}E_i(\vec{x})(E_{i+1}(\vec{x})-E_i(\vec{x}))\Big|\\&=\Big|\sum_{C\in\Sigma^{(i)}}\sum_{\vec{x}\in C}E_i(\vec{x})(E_{i+1}(\vec{x})-E_i(\vec{x}))\Big|\\&=\Big|\sum_{C\in\Sigma^{(i)}}\delta_C(W)\sum_{\vec{x}\in C}(E_{i+1}(\vec{x})-E_i(\vec{x}))\Big|\leqslant|Y|<2^{-8}\alpha(\varepsilon)\varepsilon N^2.\end{aligned}\tag{92}$$

Найдем теперь второй член (91). Напомним, что $U_2=\{C_1,\dots,C_l\}$. Для любого $j=1,\dots,l$ множества $S_1^{(j)},\dots,S_{r(j)}^{(j)}$ и Ω_j представляют собой разбиение C_j. Так как $|\Omega_j|\leqslant|C_j|^{11/12}$, то для всех $t=1,\dots,r(j)$ имеем $|S_t^{(j)}|\geqslant|C_j|/(2r(j))$. Пусть $\delta_{jt}=\delta_{S_t^{(j)}}(W)$. Применяя неравенство (90), получаем

$$\begin{aligned}\|E_{i+1}-E_i\|_2^2&=\sum_{\vec{x}}|E_{i+1}(\vec{x})-E_i(\vec{x})|^2\geqslant\sum_{j=1}^{l}\sum_{\vec{x}\in C_j}|E_{i+1}(\vec{x})-E_i(\vec{x})|^2\\&\geqslant\sum_{j=1}^{l}\sum_{t=1}^{r(j)}\sum_{\vec{x}\in S_t^{(j)}}|E_{i+1}(\vec{x})-E_i(\vec{x})|^2=\sum_{j=1}^{l}\sum_{t=1}^{r(j)}\big|S_t^{(j)}\big|\,|\delta_{jt}-\delta_j|^2\\&\geqslant\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l}|C_j|\frac{1}{r(j)}\sum_{t=1}^{r(j)}|\delta_{jt}-\delta_j|^2\geqslant2^{-5}\sum_{j=1}^{l}|C_j|\alpha(\delta_j).\end{aligned}\tag{93}$$

Поскольку $\big|W\cap\bigsqcup_{C_j\in U_2}C_j\big|\geqslant\varepsilon N^2$, то $\sum_{j=1}^{l}\delta_j|C_j|\geqslant\varepsilon N^2$. Применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned}\varepsilon N^2&\leqslant\sum_{j=1}^{l}\delta_j|C_j|=\sum_{j=1}^{l}(\delta_j|C_j|^{1/\rho})|C_j|^{1-1/\rho}\leqslant\left(\sum_{j=1}^{l}\delta_j^\rho|C_j|\right)^{1/\rho}\left(\sum_{j=1}^{l}|C_j|\right)^{1-1/\rho}\\&\leqslant N^{2(1-1/\rho)}\left(\sum_{j=1}^{l}\delta_j^\rho|C_j|\right)^{1/\rho}.\end{aligned}\tag{94}$$

Отсюда имеем

$$\sum_{j=1}^{l}|C_j|\alpha(\delta_j)=K\sum_{j=1}^{l}\delta_j^\rho|C_j|\geqslant K\varepsilon^\rho N^2=\alpha(\varepsilon)N^2.\tag{95}$$

Вследствие неравенств в (93)

$$\|E_{i+1}-E_i\|_2^2\geqslant2^{-5}\alpha(\varepsilon)N^2.\tag{96}$$

Используя (92), (96) и оценку $N\geqslant(C\alpha^{c_1})^{-(1/c_2)^{1/\alpha}}$, находим

$$\|E_{i+1}\|_2^2\geqslant\|E_i\|_2^2+2^{-6}\alpha(\varepsilon)N^2.\tag{97}$$

Итак, для $\Sigma^{(i+1)}$ и $\Omega^{(i+1)}$ все неравенства (82)–(84) выполнены.

Мы видим, что условие $N \geqslant (C\alpha^{c_1})^{-(1/c_2)^{1/\alpha}}$ позволяет провести $2^6/\alpha(\varepsilon)$ шагов индуктивной процедуры. Если до этого времени алгоритм закончится, то теорема будет доказана. Но условие (83) гарантирует, что количество шагов будет меньше $2^6/\alpha(\varepsilon)$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{Z}_N$ – некоторые множества, $|W_1| = \beta_1 N$, $|W_2| = \beta_2 N$, $\zeta \in (0,1)$ – некоторое число, $\alpha(s) = Ks^\rho$, $K \in (0,1]$, $\rho \geqslant 4$ и $a = \alpha(\zeta\beta_1\beta_2)$. Предположим, что множество A содержится в $W_1 \times W_2$, $|A| = \delta|W_1|\,|W_2|$ и $N \geqslant (Ca^{c_1})^{-(1/c_2)^{1/a}}$, где $C = 2^{1000\rho}$, $c_1 = 100\rho$ и $c_2 = 2^{-128}$. Тогда существуют такой правильный квадрат $P = P_1 \times P_2$, $|P| \geqslant N^{c_2^{1/a}}$, и множества R_1, R_2, $R_1 \subseteq (W_1 \cap P_1)$, $R_2 \subseteq (W_2 \cap P_2)$, $|R_1 \times R_2| \geqslant \zeta\beta_1\beta_2|P|$, обладающие следующими свойствами: R_1, R_2 являются $\alpha(\delta_{P_1}(R_1))^{1/2}$- и $\alpha(\delta_{P_2}(R_2))^{1/2}$-равномерными соответственно в P_1 и P_2 и $\delta_{R_1\times R_2}(A) \geqslant \delta - 4\zeta$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon = \zeta\beta_1\beta_2$. Применим теорему 9 к множеству $W = W_1 \times W_2$. Множество $A_1 = A \setminus B$ имеет плотность в W не меньше чем $\delta - 4\zeta$, следовательно, существует правильный квадрат $P = P_1 \times P_2$, в котором W является $\alpha(\delta_P(E))$-равномерным, $|W \cap P| \geqslant \varepsilon|P|$, $|P| \geqslant N^{c_2^{1/\alpha}}$, $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ и $\delta_{P\cap W}(A) \geqslant \delta - 4\zeta$. Пусть $W \cap P = R_1 \times R_2$ и $R_1 = \gamma_1|P_1|$, $R_2 = \gamma_2|P_2|$. Тогда $|W \cap P| = \gamma_1\gamma_2|P|$. Обозначим через f, f_1 и f_2 балансовые функции множеств W, R_1 и R_2 соответственно. Для любых r_1, r_2, одновременно не равных нулю, выполнено

$$|\hat{f}(r_1, r_2)| \leqslant (K\gamma_1^\rho\gamma_2^\rho)^{1/4}|P|.$$

Если $r_1 \neq 0$, $r_2 = 0$, то $\hat{f}(r_1, r_2) = \gamma_2|P_2|\hat{f}_1(r_1)$ и $|\hat{f}_1(r_1)| \leqslant K^{1/4}\gamma_1^{\rho/4}|P_1|$. Аналогично, $|\hat{f}_2(r)| \leqslant K^{1/4}\gamma_2^{\rho/4}|P_2|$ для всех $r \in \mathbb{Z}_N \setminus \{0\}$. Применяя лемму 1 к множествам R_1, R_2, получаем, что R_1 является $K^{1/2}\gamma_1^{\rho/2}$-равномерным в P_1, а R_2 является $K^{1/2}\gamma_1^{\rho/2}$-равномерным в P_2. Следствие доказано.

Доказательство теоремы 4. Пусть $N_1 \in \mathbb{N}$ и $J_1, J_2 \subseteq \mathbb{Z}_{N_1}$ – некоторые множества, $|J_1| = \omega_1 N_1$, $|J_2| = \omega_2 N_1$. Предположим, что множество A принадлежит $J_1 \times J_2$, не содержит уголков и имеет мощность $|A| = \delta|J_1|\,|J_2|$. Предположим также, что J_1, J_2 являются $(10^{-330}\omega_1^{24}\omega_2^{24}\delta^{132})$-равномерными и $N_1 \geqslant 10^{10}(\delta^4\omega_1\omega_2)^{-1}$. Мы докажем, что при этих условиях множества J_1 и J_2 имеют подмножества I_1 и I_2, а множество A имеет подмножество A' такие, что:

1) $A' \subseteq I_1 \times I_2$;
2) $|A'| \geqslant (\delta + 10^{-20000}\delta^{7000})|I_1|\,|I_2|$;
3) $|I_1| \geqslant 10^{-20000}\delta^{7000}\omega_1 N_1$, $|I_2| \geqslant 10^{-20000}\delta^{7000}\omega_2 N_1$.

Пусть для $\alpha_1 = 10^{-108}\delta^{44}$ одно из неравенств (30) или (31) не выполнено. Тогда по лемме 11 у множеств J_1, J_2 найдутся подмножества I_1, I_2, которые удовлетворяют (47), (48). Положим $A' = A \cap (I_1 \times I_2)$. Для множеств I_1, I_2 и A' условия 1)–3) выполнены.

Таким образом, мы можем считать, что неравенства (30), (31) верны при $\alpha_1 = 10^{-108}\delta^{44}$. Если множество A является $10^{-108}\delta^{44}$-равномерным относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, то по теореме 7 A содержит уголок. Если множество A не является $10^{-108}\delta^{44}$-равномерным относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, то

по предложению 3 множества J_1 и J_2 имеют подмножества I_1, I_2, а множество A – подмножество $A' = A \cap (I_1 \times I_2)$, для которых выполнены свойства 1)–3). Свойство 2) можно даже заменить на более сильное, а именно $|A'| \geqslant (\delta + 10^{-19000}\delta^{7000})|I_1|\,|I_2|$.

Приступим теперь к непосредственному доказательству теоремы.

Пусть множество $A \subseteq \{1,\dots,N\}^2$ имеет мощность δN^2 и не содержит уголков. Пусть $E_1 = \{1,\dots,N\}$, $E_2 = \{1,\dots,N\}$. Тогда E_1 и E_2 являются 0-равномерными множествами. Кроме того, по условию теоремы $N \geqslant 10^{10}\delta^{-4}$. Рассуждая, как в начале доказательства теоремы, находим в A подмножества A' и $G_1 \subseteq E_1$, $G_2 \subseteq E_2$, удовлетворяющие условиям 1)–3). Пусть $\beta_1 = |G_1|/N$, $\beta_2 = |G_2|/N$. Множество A' так же, как и A, не содержит уголков и имеет плотность δ_1 в $G_1 \times G_2$ не меньше чем $\delta + 10^{-19000}\delta^{7000}$.

Пусть $\zeta = 10^{-20000}\delta^{7000}$. Рассмотрим функцию $\alpha(s) = 10^{-660}(\zeta\beta_1\beta_2)^{48}\delta^{264}s^{48}$, и пусть $a = \alpha(\zeta\beta_1\beta_2)$. По условию теоремы $N \geqslant (Ca^{c_1})^{-(1/c_2)^{1/a}}$, значит, мы можем применить следствие 1 к множествам G_1, G_2 и A'. По этому следствию существуют такой правильный квадрат $P = P_1 \times P_2$, $|P| \geqslant N^{c_2^{1/a}}$, и множества R_1, R_2, $R_1 \subseteq (G_1 \cap P_1)$, $R_2 \subseteq (G_2 \cap P_2)$, $|R_1| = \gamma_1|P_1|$, $|R_2| = \gamma_2|P_2|$, $|R_1 \times R_2| \geqslant \zeta\beta_1\beta_2|P|$, обладающие следующими свойствами: R_1, R_2 являются $(10^{-330}\gamma_1^{24}\gamma_2^{24}\delta^{132})$-равномерными соответственно в P_1 и P_2 и, кроме того, $\delta_{R_1\times R_2}(A') \geqslant \delta_1 - 4\zeta$. Плотность A в $R_1 \times R_2$ не меньше чем $\delta_1 - 4\cdot 10^{-20000}\delta^{7000} \geqslant \delta + 10^{-20000}\delta^{7000}$.

Применим те же рассуждения к правильному квадрату P, $(10^{-330}\gamma_1^{24}\gamma_2^{24}\delta^{132})$-равномерным множествам R_1, R_2, $R_1 \times R_2 \subseteq P$, и множеству $A'' = A' \cap (R_1 \times R_2)$. Мы можем повторить наши рассуждения несколько раз.

Пусть на i-м шаге алгоритма мы получили правильный квадрат $P^{(i)} = P_1^{(i)} \times P_2^{(i)}$, множества $R_1^{(i)}$, $R_2^{(i)}$, $R_1^{(i)} = \gamma_1^{(i)}\big|P_1^{(i)}\big|$, $R_2^{(i)} = \gamma_2^{(i)}\big|P_2^{(i)}\big|$ и множество $A_i \subseteq R_1^{(i)} \times R_2^{(i)}$, $|A_i| = \delta_i\big|R_1^{(i)}\big|\,\big|R_2^{(i)}\big|$, так что множества $R_1^{(i)}$, $R_2^{(i)}$ являются $\big(10^{-330}(\gamma_1^i)^{24}(\gamma_2^i)^{24}\delta^{132}\big)$-равномерными соответственно в $P_1^{(i)}$ и $P_2^{(i)}$.

Если

$$\big|P_1^{(i)}\big| = \big|P_2^{(i)}\big| \geqslant \big(\delta^4\gamma_1^{(i)}\gamma_2^{(i)}\big)^{-1}, \tag{98}$$

то, рассуждая, как в начале доказательства теоремы, находим в A_i подмножества A_i' и $G_1^{(i)} \subseteq R_1^{(i)}$, $G_2^{(i)} \subseteq R_2^{(i)}$, удовлетворяющие условиям 1)–3), $G_1^{(i)} = \beta_1^{(i)}\big|P_1^{(i)}\big|$, $G_2^{(i)} = \beta_2^{(i)}\big|P_2^{(i)}\big|$. При этом множество A_i' так же, как и A, не содержит уголков и имеет плотность δ_i' в $G_1^{(i)} \times G_2^{(i)}$ не меньше чем $\delta_i + 10^{-19000}\delta^{7000}$. Из условия 3) вытекает

$$\beta_1^{(i)} \geqslant 10^{-20000}\delta^{7000}\gamma_1^{(i)}, \qquad \beta_2^{(i)} \geqslant 10^{-20000}\delta^{7000}\gamma_2^{(i)}. \tag{99}$$

Пусть $\zeta = 10^{-20000}\delta^{7000}$. Рассмотрим функцию $\alpha_i(s) = 10^{-660}\big(\zeta\beta_1^{(i)}\beta_2^{(i)}\big)^{48} \times \delta^{264}s^{48}$, и пусть $a_i = \alpha_i\big(\zeta\beta_1^{(i)}\beta_2^{(i)}\big)$. Если

$$\big|P_1^{(i)}\big| \geqslant (Ca_i^{c_1})^{-(1/c_2)^{1/a_i}}, \tag{100}$$

то мы можем применить следствие 1 к множествам $G_1^{(i)}$, $G_2^{(i)}$ и A_i'. По этому следствию существуют такой правильный квадрат $P^{(i+1)} = P_1^{(i+1)} \times P_2^{(i+1)}$,

$\bigl|P_1^{(i+1)}\bigr| \geqslant \bigl|P^{(i)}\bigr|^{c_2^{1/a}}$, и множества $R_1^{(i+1)}$, $R_2^{(i+1)}$, $R_1^{(i+1)} \subseteq \bigl(G_1^{(i)} \cap P_1^{(i+1)}\bigr)$, $R_2^{(i+1)} \subseteq \bigl(G_2^{(i)} \cap P_2^{(i+1)}\bigr)$, $R_1^{(i+1)} = \gamma_1^{(i+1)}\bigl|P_1^{(i+1)}\bigr|$, $R_2^{(i+1)} = \gamma_2^{(i+1)}\bigl|P_2^{(i+1)}\bigr|$, $\bigl|R_1^{(i+1)} \times R_2^{(i+1)}\bigr| \geqslant \zeta\beta_1^{(i)}\beta_2^{(i)}\bigl|P^{(i+1)}\bigr|$, обладающие следующими свойствами: $R_1^{(i+1)}$, $R_2^{(i+1)}$ являются $\bigl(10^{-330}\bigl(\gamma_1^{(i+1)}\bigr)^{24}\bigl(\gamma_2^{(i+1)}\bigr)^{24}\delta^{132}\bigr)$-равномерными в $P_1^{(i+1)}$, $P_2^{(i+1)}$ и $\delta_{R_1\times R_2}(A_i') \geqslant \delta_i' - 4\zeta$. Плотность A_i' в $R_1^{(i+1)} \times R_2^{(i+1)}$ не меньше чем $\delta_i' - 4\cdot 10^{-20000}\delta^{7000} \geqslant \delta_i + 10^{-20000}\delta^{7000}$.

Из неравенств $|R_1^{(i+1)} \times R_2^{(i+1)}| \geqslant \zeta\beta_1^{(i)}\beta_2^{(i)}|P^{(i+1)}|$ и (99) вытекает

$$\gamma_1^{(i+1)}\gamma_2^{(i+1)} \geqslant \zeta\beta_1^{(i)}\beta_2^{(i)} \geqslant 10^{-60000}\delta^{21000}\gamma_1^{(i)}\gamma_2^{(i)}. \tag{101}$$

Кроме того,

$$\bigl|P_1^{(i+1)}\bigr| \geqslant \bigl|P^{(i)}\bigr|^{c_2^{1/a_i}}. \tag{102}$$

Предположим, что на каждом шаге нашего алгоритма условия (98) и (100) были выполнены. Поскольку плотность A в множествах $R_1^{(i)} \times R_2^{(i)}$ на каждом шаге возрастает на величину $10^{-20000}\delta^{7000}$, то через некоторое число шагов мы найдем правильный квадрат $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ и $(10^{-330}\gamma_1^{24}\gamma_2^{24}\delta^{132})$-равномерные множества $\mathbb{R}_1$, $\mathbb{R}_2$, $|\mathbb{R}_1| = \gamma_1|\mathbb{P}_1|$, $|\mathbb{R}_2| = \gamma_2|\mathbb{P}_2|$ такие, что $A \cap (\mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2)$ будет $(10^{-108}\delta^{44})$-равномерным относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, в $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2$ и неравенства (30), (31) будут выполнены для $\alpha_1 = 10^{-108}\delta^{44}$. Если $|\mathbb{P}_1| = |\mathbb{P}_2| \geqslant 10^{10}(\delta^4\gamma_1\gamma_2)^{-1}$, то по теореме 7 множество A содержит уголок.

Итак, если на каждом шаге алгоритма выполняются условия (98) и (100), то теорема 4 доказана. Проверим выполнение условий (98), (100).

Оценим общее количество шагов этой итеративной процедуры. Из свойства 2) вытекает, что для увеличения плотности A от δ до 1 необходимо не более $10^{20000}/\delta^{7000}$ шагов.

На первом шаге плотности $R_1^{(1)}$, $R_2^{(1)}$ в $\mathbb{Z}_N$ равны 1. Из неравенства (101) вытекает, что на i-м шаге алгоритма $\gamma_1^{(i)} \times \gamma_2^{(i)} \geqslant (10^{-60000}\delta^{21000})^i$. Следовательно, на последнем шаге итеративной процедуры плотность $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2$ в $\mathbb{P}$ будет не меньше $C_1\delta^{C_2\delta^{-\bar{c}}}$, где C_1, C_2, $\bar{c}$ – некоторые эффективные константы.

Общее количество шагов алгоритма не больше $O\bigl(\delta^{-\bar{c}}\bigr)$. На i-м шаге алгоритма плотности $\beta_1^{(i)}$, $\beta_2^{(i)}$ не меньше $C_1\delta^{C_2\delta^{-\bar{c}}}$, $\zeta = O(\delta^g)$, $g > 0$ и $a_i = \delta^w\bigl(\beta_1^{(i)}\beta_2^{(i)}\bigr)^q$, $w, q > 1$. Используя эти оценки и неравенство (102), получаем $|P^{(i)}| \geqslant |P^{(i-1)}|^{\kappa_0^{(1/\delta)^{\delta^{-C_3}}}}$, где $0 < \kappa_0 < 1$, $C_3 > 0$. Следовательно, на последнем шаге нашей итеративной процедуры выполняется оценка $|\mathbb{P}| \geqslant N^{\kappa^{(1/\delta)^{\delta^{-b}}}}$, где $0 < \kappa < 1$, $b > 1$. По условию теоремы $N \geqslant \exp\exp\exp(\delta^{-c})$, $c > 0$. Отсюда имеем

$$|\mathbb{P}| \geqslant N^{\kappa^{(1/\delta)^{\delta^{-b}}}} \geqslant \bigl(10^{10}\delta^4\bigl(C_1\delta^{C_2\delta^{-\bar{c}}}\bigr)\bigr)^{-2} \geqslant 10^{10}(\delta^4\gamma_1\gamma_2)^{-2}. \tag{103}$$

Значит, на последнем шаге итеративной процедуры неравенство (98) выполнено. Ясно, что это условие было выполнено и на промежуточных шагах. Проверим выполнение условия (100) на последнем шаге алгоритма. Нам необходимо проверить неравенство

$$|\mathbb{P}| \geqslant N^{\kappa^{(1/\delta)^{\delta^{-b}}}} \geqslant \bigl((1/\delta)^{\delta^{-C_4}}\bigr)^{(1/c_2)^{(1/\delta)^{\delta^{-C_5}}}}, \tag{104}$$

где $C_4 > 0,\ C_5 > 0$ – некоторые эффективные константы. Но неравенство (104) легко вытекает из условия $N \geqslant \exp\exp\exp(\delta^{-c})$. Теорема 4 доказана.

§ 5. О возвращаемости

В настоящем параграфе приведены приложения теоремы 4 к динамическим системам.

Пусть X – метрическое пространство с метрикой $d(\,\cdot\,,\cdot\,)$ и борелевской сигма-алгеброй измеримых множеств Ф. Пусть T – сохраняющее меру μ отображение X в себя. Всюду ниже будем считать, что $\mu(X) = 1$.

Хорошо известная теорема Пуанкаре о возвращении [17] утверждает, что почти каждая точка X возвращается, т. е. для почти всех $x \in X$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall K > 0 \ \exists t > K \colon d(T^t x, x) < \varepsilon.$$

Рассмотрим меру $H_h(\,\cdot\,)$ на X, определенную следующим образом:

$$H_h(E) = \lim_{\delta \to 0} H_h^{\delta}(E),$$

где $h(t)$ – неотрицательная ($h(0) = 0$) непрерывная возрастающая функция, а $H_h^{\delta}(E) = \inf\{\sum h(\delta_j)\}$, где инфимум берется по не более чем счетным покрытиям E открытыми множествами $\{B_j\},\ \operatorname{diam}(B_j) = \delta_j < \delta$. Если $h(t) = t^{\alpha}$, то получаем обычную меру Хаусдорфа $H_{\alpha}(\,\cdot\,)$.

Внешняя мера $H_h(\,\cdot\,)$ является сигма-аддитивной на сигма-алгебре множеств, измеримых по Каратеодори (более подробные сведения можно найти, например, в [19]). Хорошо известно, что эта сигма-алгебра содержит все борелевские множества.

Будем говорить, что меры μ и H_h *согласованы*, если любое μ-измеримое множество является H_h-измеримым (в смысле измеримости по Каратеодори).

Следующие ниже теоремы были доказаны в [21] (см. также [19], [20]).

Теорема 10. *Пусть X – метрическое пространство, имеющее меру $H_h(X) < \infty$, а T – отображение X в себя, сохраняющее меру μ. Будем считать, что μ и H_h согласованы. Тогда функция*

$$C(x) = \lim_{n \to \infty} \inf\{n \cdot h(d(T^n x, x))\}$$

интегрируема по мере μ и для любого μ-измеримого A выполнено неравенство

$$\int_A C(x)\, d\mu \leqslant H_h(A).$$

Если $H_h(A) = 0$, то $\int_A C(x)\, d\mu = 0$ без условия согласованности мер μ и H_h.

Определение 4. Пусть G – вполне ограниченное подмножество в X; *ε-энтропией* множества G (следуя [5]) называется величина $H_{\varepsilon}(G, X) = \log_2 N_{\varepsilon}(G, X)$, где $N_{\varepsilon}(G, X)$ – наименьшее количество точек, которое может быть в ε-сети этого множества. Обозначим $N_{\varepsilon}(X) = N_{\varepsilon}(X, X)$.

Если X вполне ограничено, то $N_{\delta}(X)$ конечно для любого δ и имеет место неравенство $\sum h(\delta_j) \leqslant N_{\delta}(X) h(\delta)$. Следовательно, если $N_{\delta}(X) \leqslant C/h(\delta)$ (h – функция из определения H_h), то $H_h(X) \leqslant C$.

Определение 5. Возьмем произвольное натуральное N. Функцию $C_N(x) = \min\{d(T^n x, x) \,|\, 1 \leqslant n \leqslant N\}$ назовем N *константой возвращаемости точки* x.

Теорема 11. *Пусть X – вполне ограниченное метрическое пространство с метрикой $d(\,\cdot\,,\cdot\,)$, функцией $N(z) = N_z(X)$, $\operatorname{diam}(X) = 1$ и T – отображение X в себя, сохраняющее меру μ. Пусть $A \subseteq X$ – любое μ-измеримое множество и $g(x)$ – действительная неубывающая функция, ограниченная на $[0,1]$, такая, что для любого $t \in (0,1]$ существует интеграл Стилтьеса $\int_t^1 N_A(z)\,dg(z)$, где $N_A(z) = \min(\mu(A), N_z(A,X)/N)$. Тогда выполнено следующее неравенство*:

$$\int_A g(C_N(x))d\mu \leqslant \inf_t \biggl\{ g(t)\mu(A) + \int_t^1 N_A(z)\,dg(z) \biggr\}.$$

Пусть теперь на X действуют два *коммутирующих* отображения, сохраняющие меру μ. Основной результат этого параграфа содержится в следующих теоремах.

Теорема 12. *Пусть X – метрическое пространство, имеющее меру $H_h(X) < \infty$, а S, R – коммутирующие отображения X в себя, сохраняющие меру μ. Будем считать, что μ и H_h согласованы. Тогда функция*

$$C_{S,R}(x) = \liminf_{n\to\infty} \bigl\{ L^{-1}(n) \max\{h(d(S^n x, x)), h(d(R^n x, x))\} \bigr\},$$

где $L^{-1}(n) = 1/L(n)$ и $L(n)$ определено формулой (3), *интегрируема по мере μ и для любого μ-измеримого A выполнено неравенство*

$$\int_A C_{S,R}(x)\,d\mu \leqslant H_h(A).$$

Если $H_h(A) = 0$, то $\int_A C_{S,R}(x)\,d\mu = 0$ без условия согласованности мер μ и H_h.

По аналогии с определением 5 мы приведем определение константы возвращаемости точки под действием двух коммутирующих операторов.

Определение 6. Возьмем произвольное натуральное N. Функцию

$$C_N^{S,R}(x) = \min\{\max\{d(S^n x, x), d(R^n x, x)\} \,|\, 1 \leqslant n \leqslant N\}$$

назовем N *константой одновременной возвращаемости точки* x.

Теорема 13. *Пусть X – вполне ограниченное метрическое пространство с метрикой $d(\,\cdot\,,\cdot\,)$, функцией $N(z) = N_z(X)$, $\operatorname{diam}(X) = 1$ и S, R – отображения X в себя, сохраняющие меру μ. Пусть $A \subseteq X$ – любое μ-измеримое множество и $g(x)$ – действительная неубывающая функция, ограниченная на $[0,1]$, такая, что для любого $t \in (0,1]$ существует интеграл Стилтьеса $\int_t^1 N_A(z)\,dg(z)$, где $N_A(z) = \min(\mu(A), N_z(A,X)L(N))$. Тогда для достаточно больших N выполнено следующее неравенство*:

$$\int_A g(C_N^{S,R}(x))\,d\mu \leqslant \inf_t \biggl\{ g(t)\mu(A) + \int_t^1 N_A(z)\,dg(z) \biggr\}.$$

Нам понадобятся несколько лемм.

Лемма 14. *Пусть $\{M_1, \dots, M_n\}$ – некоторое семейство измеримых множеств. Пусть также известно, что любая точка $x \in X$ принадлежит не более чем l множествам из этого семейства. Тогда*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} M_i\Big) \geqslant \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n}\mu(M_i).$$

Доказательство. Обозначим через Λ объединение всех M_i. Для $j = 1, \dots, l$ введем множества "уровней"

$$\Lambda_j = \{x \in \Lambda \,|\, \text{существует } j \text{ множеств } M_k, \text{ содержащих } x\}.$$

Имеем $\sum_{i=1}^{n}\mu(M_i) = \sum_{j=1}^{l}\mu(\Lambda_j)$. Поскольку для любого j выполнено $\mu(\Lambda_j) \leqslant \mu(\Lambda)$, то $\sum_{i=1}^{n}\mu(M_i) \leqslant l\mu(\Lambda)$. Лемма доказана.

Теоремы 12 и 13 вытекают из следующей ключевой леммы. Доказательство отличается от доказательств теорем 10, 11 несущественными деталями (более подробно см. [21]).

Лемма 15. *Пусть Y – μ-измеримое множество, $t \geqslant 1$,*

$$Y(t) := \{x \in Y \,|\, S^i x \notin Y \text{ или } R^i x \notin Y \text{ для всех натуральных } i,\ 1 \leqslant i \leqslant t\}.$$

Тогда существует такое t_0, что для всех $t \geqslant t_0$ выполнено $\mu(Y(t)) \leqslant L(t)$.

Доказательство. Для простоты будем считать число t натуральным. Пусть

$$M_{k_1,k_2} = S^{-k_1}R^{-k_2}(Y(t)), \qquad 1 \leqslant k_1, k_2 \leqslant t.$$

Рассмотрим точку $x \in X$. Обозначим через $A(x)$ множество тех индексов (k_1, k_2), для которых $x \in M_{k_1,k_2}$. Тогда $A(x) \subseteq [1,t]^2$. Если t достаточно большое и $|A(x)| > t^2L(t)$, то по теореме 4 в $A(x)$ есть уголок. Значит, существуют точки $u_1, u_2, u_3 \in Y(t)$ и натуральные числа k, m, d такие, что

$$x = S^{-k}R^{-m}u_1 = S^{-k-d}R^{-m}u_2 = S^{-k}R^{-k-d}u_3.$$

Пользуясь коммутативностью S и R, получаем $u_1 = S^{-d}u_2 = R^{-d}u_3$. Отсюда для $u_1 \in Y(t)$ имеем $S^d u_1 \in Y(t)$ и $R^d u_1 \in Y(t)$, $d \leqslant t$, что противоречит определению множества $Y(t)$. Значит, точка x принадлежит не более $t^2L(t)$ множествам M_{k_1,k_2}. По лемме 14

$$1 \geqslant \mu\Big(\bigcup_{k_1,k_2} M_{k_1,k_2}\Big) \geqslant \frac{1}{t^2L(t)}\sum_{k_1,k_2}\mu(M_{k_1,k_2}) = \frac{\mu(Y(t))}{L(t)}\,, \tag{105}$$

откуда следует, что $\mu(Y(t)) \leqslant L(t)$. Лемма доказана.

Мы получим приложение теоремы 12 для случая непрерывных коммутирующих отображений.

Следующая лемма может быть найдена, например, в [24]. Мы приводим ее здесь для полноты изложения.

Лемма 16. *Пусть X – компактное метрическое пространство. Пусть также $T_1, \dots, T_l$ – непрерывные коммутирующие отображения X в себя. Тогда существует конечная мера μ, которая инвариантна относительно всех этих отображений.*

Доказательство. Будем проводить доказательство индукцией по числу отображений. Если отображение одно, то существование инвариантной меры следует из теоремы Боголюбова–Крылова (см., например, [22]). Пусть мы доказали лемму для k отображений, $k \geqslant 1$. Докажем ее для набора из $k+1$ отображения. Пусть ν – общая инвариантная мера для отображений $T_1, \dots, T_k$. Пусть мера $\nu \circ T_{k+1}^{-i}$, $i \in \mathbb{N}$, определена для произвольного борелевского множества E по формуле $(\nu \circ T_{k+1}^{-i})(E) = \nu(T_{k+1}^{-i}E)$. Рассмотрим последовательность мер

$$\nu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \nu \circ T_{k+1}^{-i}. \tag{106}$$

Рассмотрим банахово пространство $C(X)$ непрерывных неотрицательных функций. Каждой мере μ сопоставим функционал $L_\mu(f)$ по формуле $L_\mu(f) = \int f\, d\mu$. Множество всех таких функционалов обозначим $M(X)$, $M(X) \subseteq (C(X))^*$. Как известно (см., например, [23]), $M(X)$ является компактом в $*$-слабой топологии, значит, последовательность (106) имеет подпоследовательность ν_{n_j}, сходящуюся к некоторой мере μ. Докажем, что μ – искомая мера. Ясно, что $\mu(X) = 1$. Поскольку отображения $T_1, \dots, T_{k+1}$ коммутирующие, то меры ν_n будут инвариантны относительно $T_1, \dots, T_k$. Значит, предельная мера μ также будет инвариантна относительно $T_1, \dots, T_k$.

Докажем, что мера μ является T_{k+1}-инвариантной. Пусть $\varepsilon > 0$ и $f(x)$ – произвольная неотрицательная непрерывная функция на X. По условию X – компактное метрическое пространство, следовательно, $\|f\|_\infty < \infty$. Так как мера μ является $*$-слабым пределом мер ν_{n_j}, то найдется такое натуральное J_1, что для всех $j \geqslant J_1$ выполнено $|L_\mu(f) - L_{\nu_{n_j}}(f)| < \varepsilon/3$. Аналогично, существует такое натуральное J_2, что для всех $j \geqslant J_2$ выполнено $|L_\mu(f \circ T_{k+1}) - L_{\nu_{n_j}}(f \circ T_{k+1})| < \varepsilon/3$. Имеем

$$\bigl|L_{\nu_{n_j}}(f \circ T_{k+1}) - L_{\nu_{n_j}}(f)\bigr| \leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{n_j}\,.$$

Поскольку последовательность n_j возрастает и $\|f\|_\infty < \infty$, то найдется такое натуральное J_3, что для всех $j \geqslant J_3$ выполнено $|L_{\nu_{n_j}}(f \circ T_{k+1}) - L_{\nu_{n_j}}(f)| \leqslant \varepsilon/3$. Следовательно, для всех $j \geqslant \max(J_1, J_2, J_3)$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned}\bigl|L_\mu(f) - L_\mu(f \circ T_{k+1})\bigr| &\leqslant \bigl|L_\mu(f) - L_{\nu_{n_j}}(f)\bigr| + \bigl|L_\mu(f \circ T_{k+1}) - L_{\nu_{n_j}}(f \circ T_{k+1})\bigr| \\ &+ \bigl|L_{\nu_{n_j}}(f \circ T_{k+1}) - L_{\nu_{n_j}}(f)\bigr| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned} \tag{107}$$

Значит, мера μ является T_{k+1}-инвариантной. Лемма доказана.

Следствие 2. *Пусть X – компактное метрическое пространство, имеющее меру $H_h(X) < \infty$, S, R – непрерывные коммутирующие отображения X в себя. Тогда существует $x \in X$ такое, что*

$$\liminf_{n\to\infty}\bigl\{L^{-1}(n)\max\{h(d(S^n x, x)), h(d(R^n x, x))\}\bigr\} \leqslant H_h(X),$$

где $L^{-1}(n) = 1/L(n)$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю доктору физ.-матем. наук Н. Г. Мощевитину за непрестанный интерес к работе и долготерпение.

Список литературы

1. Van der Waerden B. L., "Beweis einer Baudetschen Vermutung", *Nieuw Arch. Wisk.*, **15** (1927), 212–216.
2. Erdos P., Turan P., "On some sequences of integers", *J. London Math. Soc.*, **11** (1936), 261–264.
3. Roth K. F., "On certain sets of integers", *J. London Math. Soc.*, **28** (1953), 245–252.
4. Bourgain J., "On triples in arithmetic progression", *GAFA*, **9** (1999), 968–984.
5. Szemerédi E., "On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression", *Acta Arith.*, **27** (1975), 299–345.
6. Gowers W. T., "A new proof of Szemerédi's theorem", *GAFA*, **11**:3 (2001), 465–588.
7. Gowers W. T., "Rough structure and classification", *Geom. Funct. Anal. Spec. Vol.*, 2000.
8. Rankin R. A., "Sets of Integers Containing not more than a Given Number of Terms in Arithmetic Progression", *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **65**:4. Sec. A (1961), 332–344.
9. Ajtai M., Szemerédi E., "Sets of lattice points that form no squares", *Stud. Sci. Math. Hungar.*, **9** (1974), 9–11.
10. Chung F. R. K., Graham R. L., Wilson R. M., "Quasi-random graphs", *Combinatorica*, **9**:4 (1989), 345–362.
11. Behrend F. A., "On sets of integers which contain no three terms in arithmetic progression", *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **23** (1946), 331–332.
12. Vu V. H., "On a question of Gowers", *Ann. of Combinatorics*, **6** (2002), 229–233.
13. Solymosi J., "Note on a generalization of Roth's theorem", *Discrete and computational geometry*, **25** (2003), 825–827.
14. Green B., Tao T., *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, math.NT/0404188.
15. Фрейман Г. А., *Основания структурной теории сложения множеств*, Казанский гос. пед. ин-т, Казань, 1966.
16. Ланкастер П., *Теория матриц*, Наука, М., 1982.
17. Пуанкаре А., *Новые методы небесной механики. Избранные труды.*, **2**, Наука, М., 1972.
18. Furstenberg H., *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, Princeton (N J.), 1981.
19. Boshernitzan M., "Quantitative recurrence results", *Inventiones mathematicae*, **113** (1993), 617–631.
20. Мощевитин Н. Г., "Об одной теореме Пуанкаре", *УМН*, **53**:1 (1998), 219–220.
21. Шкредов И. Д., "О возвращаемости в среднем", *Матем. заметки*, **72**:4 (2002), 625–632.
22. Каток А. Б., Хасселблат Б., *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999.
23. Халмош П. Р., *Теория меры*, ИЛ, М., 1953.
24. Богачев В. И., *Основы теории меры*, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", М.–Ижевск, 2003.

И. Д. Шкредов (I. D. Shkredov)
Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: ishkredov@rambler.ru

Поступило в редакцию
15.06.2004